آنالیز

رضایی

بهار ۱۳۸۶

فهرست مندرجات

۱	اعداد حقیقی و مختلط	۳
۲	فضاهای متری	۱۹
۳	دنباله‌ها و سری‌ها	۷۳
۴	حد و پیوستگی	۱۴۵
۵	مشتق گیری	۱۸۵

فصل ۱

اعداد حقیقی و مختلط

مقدمه

در درس مبانی ریاضیات با مفهوم مجموعه و تعاریف اولیه مربوط به آن و همچنین با مجموعه‌ی اعداد حقیقی آشنا شدیم. در این فصل مرور مختصری بر مفاهیم مورد نیاز خواهیم کرد و به اختصار دستگاه اعداد حقیقی را به صورت یک میدان مرتب معرفی کرده و اشاره‌ی کوتاهی به میدان اعداد مختلط خواهیم کرد.

۱.۱ **تعریف.** فرض کنیم A یک مجموعه باشد. هر گاه x عضو A باشد می‌نویسیم $x \in A$ و اگر x عضو A نباشد خواهیم نوشت $x \notin A$.

مجموعه‌ای که شامل هیچ عضوی نباشد مجموعه‌ی تهی یا خالی نام دارد و آن را با علامت $\varnothing$ نشان خواهیم داد.

هر گاه هر عضو مجموعه‌ی A عضو مجموعه‌ی B باشد گوییم A زیرمجموعه‌ی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ یا $B \supseteq A$. هر گاه علاوه بر آن، عضوی در B باشد که در A نباشد، A را زیرمجموعه‌ی حقیقی یا زیرمجموعه‌ی محض B می‌خوانیم و با علامت $A \subset B$ یا $B \supset A$ نشان می‌دهیم.

اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$، آنگاه $A = B$ (توجه دارید که به اصل گسترش در مجموعه‌ها معروف است).

مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با $\mathbb{N}$، اعداد صحیح را با $\mathbb{I}$، اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ و اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان خواهیم داد.

۲.۱ دستگاه اعداد حقیقی

دستگاه اعداد حقیقی را می‌توان به دو روش معرفی کرد. روش اول به این صورت است که ابتدا اعداد طبیعی معرفی شوند و سپس اعداد صحیح و به کمک اعداد صحیح ، اعداد گویا و بالاخره دستگاه اعداد حقیقی به عنوان یک میدان مرتب و کامل ساخته می‌شود. روش دوم بدین صورت است که دستگاه اعداد حقیقی به روش اصول موضوعی به عنوان یک میدان مرتب و کامل معرفی می‌شود. سپس زیرمجموعه‌های آن، یعنی اعداد طبیعی و اعداد صحیح و گویا معرفی می‌شوند.

در این قسمت دستگاه اعداد حقیقی را به روش اصول موضوعی تعریف می‌کنیم. اصول موضوعه‌ی پذیرفته شده‌ای که $\mathbb{R}$ را به یک میدان مرتب و کامل تبدیل می‌کند عبارتند از:

۱) $\mathbb{R}$ مجموعه‌ای است حداقل دارای دو عضو، و $+$ (جمع) و $\times$ (ضرب) دو تابع (عمل) بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{R}$ می‌باشند. حاصل اعمال $+$ و $\times$ را بر زوج مرتب (a, b)، به ترتیب با $a + b$ و $a \times b$ (یا ab) نمایش می‌دهیم.

۲) به ازای هر a و b از $\mathbb{R}$، $a + b = b + a$ (خاصیت جابجایی جمع)

۳) به ازای هر a، b و c از $\mathbb{R}$، $a + (b + c) = (a + b) + c$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)

۴) عضوی مانند e در $\mathbb{R}$ موجود است به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $x + e = e + x = x$. این عضو را عضو خنثی $\mathbb{R}$ نامیده و با ۰ (صفر) نشان می‌دهیم.

۵) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، عضوی مانند x' به نام قرینه‌ی x موجود است به طوری که $x + x' = x' + x = ۰$. x' را با $-x$ نشان می‌دهیم.

بر طبق اصول ۱—۵ دستگاه $(\mathbb{R}, +)$ یک گروه جابجایی یا آبلی است.

٦) $\mathbb{R} - \{۰\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است.

۷) به ازای هر a و b از $\mathbb{R}$، $ab = ba$.

۸) به ازای هر a، b و c از $\mathbb{R}$، $(ab)c = a(bc)$.

۹) عضوی در $\mathbb{R} - \{۰\}$ وجود دارد که آن را با ۱ نشان می‌دهیم به طوری که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$، $a = a \times ۱ = ۱ \times a$. ۱ را عضو واحد ضرب می‌نامیم.

۱۰) به ازای هر a از $\mathbb{R}-\{۰\}$، عضوی به نام وارون a که با $a^{-۱}$ نشان می‌دهیم موجود است به طوری که $aa^{-۱}=۱$.

بر طبق اصول موضوعه ٦—۱۰، $(\mathbb{R}-\{۰\},\times)$ یک گروه آبلی است.

۱۱) به ازای هر a، b و c از $\mathbb{R}$، $a(b+c)=ab+ac$ (اصل توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع).

اصول موضوعه‌ی ترتیب

۱۲) $<$ (موسوم به رابطه‌ی کوچکتری) رابطه‌ای در $\mathbb{R}$ است.

۱۳) به ازای هر a و b از $\mathbb{R}$ فقط یکی از روابط زیر برقرار است

$$a<b, \qquad a=b, \qquad b<a$$

(رابطه‌ی $<$ اصل تثلیث قوی است).

۱۴) به ازای هر a، b و c از $\mathbb{R}$، اگر $a<b$ و $b<c$، آنگاه $a<c$. (رابطه‌ی $<$ متعدی است.)

۱۵) اگر $a<b$، آنگاه $a+c<b+c$.

۱٦) اگر $a<b$ و $۰<c$، آنگاه $ac<bc$.

اصل موضوع تمامیّت (اصل کمال)

۱۷) هر مجموعه‌ی غیرخالی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد سوپرمم دارد.

با نتایج اصول موضوعه در درس مبانی ریاضیات آشنا شدیم. در این قسمت با توضیح کوتاهی در مورد اعداد طبیعی و اصل موضوع تمامیّت و برخی نتایج آن، مطلب را تمام می‌کنیم.

اعداد طبیعی

۳.۱ **تعریف.** زیرمجموعه‌ی A از $\mathbb{R}$ را موروثی خوانیم در صورتی که به ازای هر x، اگر $x\in A$، آنگاه $x+۱\in A$. هر گاه علاوه بر آن $۱\in A$، A را یکدار و موروثی خوانیم. مانند اعداد مثبت.

۴.۱ **تعریف.** اشتراک کلیه مجموعه‌های یکدار و موروثی را اعداد طبیعی می‌نامیم و با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم. قضیه‌ی زیر نتیجه‌ی مستقیم تعریف اعداد طبیعی است.

۵.۱ **قضیه.**
۱) $۱ \in \mathbb{N}$

۲) $\mathbb{N}$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی یکدار و موروثی است.

۶.۱ **قضیه.** (استقراء) هر زیرمجموعه‌ی یکدار و موروثی از اعداد طبیعی شامل همه‌ی اعداد طبیعی است.

برهان. فرض کنیم $A \subseteq N$ و A یکدار و موروثی باشد. بنابر قضیه‌ی ۱، $\mathbb{N} \subseteq A$. پس $A = \mathbb{N}$.

قضیه‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۷.۱ **قضیه.** (استقراء) فرض کنیم F خاصیتی در اعداد طبیعی باشد که در شرایط دوگانه‌ی زیر صدق کند. در این صورت کلیه‌ی اعداد طبیعی در آن خاصیت صدق می‌کنند.

۱) ۱ خاصیت F دارد.

۲) به ازای هر عدد طبیعی n، اگر n خاصیت F داشته باشد، آنگاه $n + ۱$ نیز خاصیت F دارد.

۸.۱ **تعریف.** زیرمجموعه‌ی A از اعداد را خوشترتیب خوانیم در صورتی که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی آن دارای عضو ابتدا باشد. یعنی دارای کوچکترین عضو باشد. مثلاً $\mathbb{R}$ خوشترتیب نیست زیرا بازه‌ی $(۰, ۱)$ ابتدا ندارد.

یکی از مهمترین خواص اعداد طبیعی خوشترتیبی آن است که به ذکر آن اکتفا می‌کنیم.

۹.۱ **قضیه.** مجموعه‌ی اعداد طبیعی با نسبت $<$ خوشترتیب است یعنی هر زیرمجموعه‌ی ناتهی آن ابتدا دارد.

۱۰.۱ **تعریف.** (علائم ریاضی) برای تسهیل در بیان عبارات ریاضی، از علامتهای متعارف و سورها و در صورت امکان از زبان منطق ریاضی استفاده خواهیم کرد. علامت $\forall$ را سور عمومی و $\exists$ را سور وجودی گویند. عبارت $\forall x$ را به معنی «به ازای هر x» یا «x هر چه باشد» و همچنین علامت $\exists x$ را به معنی «به ازای بعضی از مقادیر x» یا «وجود دارد xای» خواهیم گرفت.

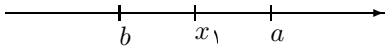
از علامتهای $\&$،$\vee$ و $\Rightarrow$ به ترتیب برای ساختن ترکیب عطفی، فصلی و شرطی گزاره‌ها استفاده خواهیم کرد. به ازای هر دو گزاره مانند p و q، گزاره‌های مرکب $p\&q$، $p \vee q$ و $p \Rightarrow q$ را به ترتیب ترکیب عطفی، فصلی و شرطی p با q گوییم.

مواردی در آنالیز پیش می‌آید که اثبات مستقیم حکمی به صورت $a \leq b$ مشکل است. در چنین مواردی قضیه‌ی زیر و قضایای مشابه مفید واقع می‌شوند.

۱۱.۱ **قضیه.** اگر دو عدد a و b چنان باشند که هر عدد بزرگتر از b از a ناکمتر باشد، آنگاه $a \leq b$. به عبارت دیگر

$$\forall x(b < x \Rightarrow a \leq x) \Rightarrow a \leq b$$

برهان. فرض می‌کنیم هر عدد بزرگتر از b از a ناکمتر باشد ولی $a > b$ (فرض خلف)



ملاحظه می‌کنیم که عدد $x_1 = \frac{a+b}{2}$ از b بزرگتر است اما از a بزرگتر نیست، و این خلاف فرض است.

۱۲.۱ **قضیه.** عدد نامنفی که از کلیه‌ی اعداد مثبت کوچکتر باشد صفر است. به عبارت دیگر

$$\forall \varepsilon(0 \leq a < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$$

برهان. اگر $a > 0$ (خلف) آنگاه بنابر فرض باید $a < \frac{a}{2}$ که یک تناقض است.

اینک توضیح کوتاهی در مورد اصل موضوع تمامیت (اصل کمال) ارائه می‌دهیم.

۱۳.۱ **تعریف.** فرض کنیم A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد.

۱) عدد a را یک کران بالای A خوانیم در صورتی که از هر عضو A ناکمتر باشد و آن را یک کران پایین A نامیم در صورتی که از هر عضو A نابیشتر باشد.

۲) A را از بالا کراندار گوییم اگر کران بالایی داشته باشد و آن را از پایین کراندار گوییم اگر کران پایینی داشته باشد و بالاخره آن را کراندار گوییم هر گاه کران بالا و پایین داشته باشد.

۳) عدد α را سوپرمم A گوییم و با $\alpha = \sup A$ نشان می‌دهیم در صورتی که

(a) α یک کران بالای A باشد.

(b) α کوچکترین کران بالای A باشد.

۴) عدد β را اینفیمم A می‌نامیم و با $\beta = \inf A$ نشان می‌دهیم در صورتی که

(a) β یک کران پایین A باشد.

(b) β بزرگترین کران پایین A باشد.

۱۴.۱ مثال. برای درک اصل موضوع تمامیت به مجموعه‌های زیر توجه کنید

$$A = \{x : x \in \mathbb{Q}, x > ۰, x^۲ < ۲\}$$
$$B = \{x : x \in \mathbb{Q}, x > ۰, x^۲ > ۲\}$$

A دارای این خاصیت است که به ازای هر $x \in A$ عدد گویایی مانند y موجود است به طوری که $y \in A$ و $x < y$. (عدد $y = \frac{۲x+۲}{x+۲}$ را امتحان کنید).

B دارای این خاصیت است که به ازای هر $x \in B$ عدد گویایی مانند y موجود است به طوری که $y \in B$ و $y < x$. (عدد $y = \frac{x^۲+۲}{۲x}$ را امتحان کنید).

با توجه به این که معادله $x^۲ = ۲$ در میدان اعداد گویا جواب ندارد، قضیه‌ی زیر نقص میدان اعداد گویا را مشخص می‌کند.

۱۵.۱ قضیه. مجموعه‌ای ناتهی از اعداد گویا موجود است که از بالا کراندار است ولی در میدان اعداد گویا سوپرمم ندارد.

برهان. نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی $A = \{x | x > ۰, x^۲ < ۲, x \in \mathbb{Q}\}$ در شرایط قضیه صدق می‌کند. واضح است که $A \neq \varnothing$ و A از بالا کراندار است. به روش برهان خلف حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم r عدد گویا باشد و $r = \sup A$. چون $۱ \in A$ پس $r \geq ۱$. در نتیجه $r > ۰$. چون $r^۲ \neq ۲$ پس $r^۲ < ۲$ یا $r^۲ > ۲$. در صورتی که $r^۲ < ۲$، در مثال ۱ دیدیم که عددی مانند $r_۱ \in A$ موجود است که $r < r_۱$ و این با سوپرمم بودن r متناقض است. در حالت $r^۲ > ۲$ در مثال ۱ دیدیم که عدد گویایی مانند s موجود است به طوری که $۰ < s < r$ و $s^۲ > ۲$. چون s نمی‌تواند کران بالای A باشد پس A عضوی مانند $r_۱$ دارد که $r_۱ > s$. در نتیجه $r_۱^۲ > s^۲ > ۲$ و این با عضویت $r_۱$ در A متناقض است.

قضیه‌ی ۱۵.۱ نقص میدان اعداد گویا را آشکار کرد. حال به بیان اصل موضوع تمامیت می‌پردازیم.

«هر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد سوپرمم دارد»

به وسیله‌ی این اصل ثابت می‌شود که در میدان اعداد حقیقی نه تنها معادله‌ی $x^۲ = ۲$، بلکه معادله $x^n = a$ ($a \geq ۰$، $n \in \mathbb{N}$) همواره جواب دارد. به طور کلی می‌توان گفت هر نتیجه اساسی در آنالیز ریشه در اصل موضوع تمامیت دارد. بحث در مورد توابع پیوسته، دنباله‌ها و سریها، مشتق و انتگرال با این اصل ارتباط دارد. وجود اعداد گنگ نتیجه‌ای از این اصل می‌باشد. تعریف توانهای گنگ مثلاً $a^{\sqrt{۳}}$ به وسیله‌ی این اصل امکان‌پذیر شده است. نتیجه‌ی مهم دیگری به نام خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی از نتایج این اصل می‌باشد که به ذکر آن اکتفا می‌کنیم.

۱۶.۱ **قضیه.** (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی). به ازای هر دو عدد حقیقی a و b که $a > ۰$، عدد طبیعی مانند n هست که $b < an$.

۱۷.۱ **قضیه.** به ازای هر عدد مثبت مانند ε، عدد طبیعی مانند n هست که $\frac{۱}{n} < \varepsilon$.

قضیه زیر که نتیجه‌ی مستقیم تعریف سوپرمم می‌باشد در استدلال مفید است.

۱۸.۱ **قضیه.** شرط لازم و کافی برای آن که عدد α سوپرمم مجموعه‌ی غیرخالی A باشد آن است که

۱) به ازای هر $x \in A$، $x \leq \alpha$.

۲) به ازای هر عدد کوچکتر از α مانند u، A عضوی بزرگتر از u داشته باشد.

قسمت دوم را می‌توان به صورت معادل زیر نیز بیان کرد

۱) به ازای هر عدد مثبت مانند ε، xای از A باشد که $\alpha - \varepsilon < x$

قضیه‌ی مشابه را در مورد اینفیمم می‌توان بیان کرد.

۱۹.۱ **تعریف.** سوپرمم یک تابع یعنی سوپرمم برد آن

۲۰.۱ **تمرین.**

۱) فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی غیر خالی و از بالا کراندار از اعداد باشند و

$$C = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

نشان دهید $\sup C = \sup A + \sup B$.

۲) فرض کنیم f و g توابع حقیقی کراندار بر E باشند ثابت کنید

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

با مثالی نشان دهید که در نامساوی فوق ممکن است تساوی برقرار نباشد.

۳) فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی غیر خالی و کراندار از بالا باشند. ثابت کنید

$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$$

دستگاه وسعت یافته‌ی اعداد حقیقی

۲۱.۱ **تعریف.** دستگاه وسعت یافته‌ی اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}^*$ نشان می‌دهیم و آن را اجتماع $\mathbb{R}$ با دو علامت $+\infty$ و $-\infty$ تعریف می‌کنیم. با حفظ ترتیب اصلی در $\mathbb{R}$، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم

$$-\infty < x < +\infty$$

با تعریف فوق، $+\infty$ یک کران بالای هر $E \subseteq \mathbb{R}^*$ می‌باشد. در $\mathbb{R}^*$ هر زیرمجموعه‌ی ناتهی سوپرمم دارد. در صورتی که از بالا کراندار به عدد حقیقی نباشد سوپرمم آن $+\infty$ است.
مطالب مشابه در مورد اینفیمم موجود است.

تعاریف جمع، ضرب و تقسیم در این دستگاه به صورت زیر است:
به ازای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = ۰$$

در صورتی که $x > ۰$

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = -\infty$$

اگر $x < ۰$،

$$x \cdot (+\infty) = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = +\infty$$

و همچنین

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

عبارتهای بی‌معنی عبارتند از:

$$+\infty-(+\infty),\quad +\infty+(-\infty),\quad ۰\cdot(\pm\infty),\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

میدان اعداد مختلط

۲۲.۱ **تعریف.** مجموعه‌ی زوجهای مرتب از اعداد حقیقی مانند $z=(a,b)$ را تحت اعمال زیر، مجموعه‌ی اعداد مختلط می‌نامیم
به ازای هر $z_۱=(a,b)$، $z_۲=(c,d)$،

$$z_۱+z_۲=(a+c,b+d)$$
$$z_۱\cdot z_۲=(ac-bd,ad+bc)$$

با تعاریف فوق مجموعه‌ی اعداد مختلط به یک میدان تبدیل می‌شود که در آن $(۰,۰)$ و $(۱,۰)$ در نقش ۰ و ۱ ظاهر می‌شوند. هر گاه عدد $(۰,۱)$ را با i نشان دهیم خواهیم داشت

$$i^۲=(۰,۱)(۰,۱)=(-۱,۰)=-(۱,۰)=-۱$$

یعنی در این دستگاه معادله $x^۲=-۱$ دارای جواب i است. با استفاده از $(۱,۰)=۱$ و $i=(۰,۱)$ می‌توان اعداد مختلط را به صورت زیر نوشت.
به ازای هر $z=(a,b)$،

$$z=(a,b)=(a,۰)+(۰,b)=a(۱,۰)+b(۰,۱)=a+bi$$

شایسته است اعداد مختلط را به صورت $a+bi$ نشان دهیم. a را قسمت حقیقی $(Re(z))$ و b را قسمت موهومی $(Im(z))$ گویند. چون اعداد مختلط به شکل $(a,۰)$ همان خواص حسابی اعداد حقیقی نظیرشان به صورت a را دارند. هرگاه $(a,۰)$ را بر a منطبق کنیم اعداد حقیقی به صورت زیرمیدانی از اعداد مختلط در می‌آید.

۲۳.۱ **تعریف.** عدد $a-bi$ را مزدوج عدد $z=a+bi$ می‌نامیم و با علامت $\bar{z}$ نشان می‌دهیم.

۲۴.۱ **تمرین.** نشان دهید به ازای هر دو عدد مختلط z و w،

۱) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

۲) $\overline{cw} = c\bar{w}$، $(c \in \mathbb{R})$

۳) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

۴) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$، $(n \in \mathbb{N})$

۲۵.۱ **تعریف.** قدر مطلق عدد مختلط $z = a + bi$ را با $|z|$ نشان می‌دهیم و آن را عدد حقیقی $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ تعریف می‌کنیم.

۲۶.۱ **تمرین.** نشان دهید

۱) $|\bar{z}| = |z|$

۲) $|zw| = |z|\,|w|$

۳) $|z + w| \leq |z| + |w|$

مروری بر مسایل شمارش‌پذیری مجموعه‌ها

۲۷.۱ **تعریف.** فرض کنیم X و Y دو مجموعه‌ی ناتهی باشند و $f \subseteq X \times Y$ تابع باشد. f را تابعی از X بتوی Y می‌گوییم. قلمرو (دامنه) f آن xهایی از X است که به عضوی از Y مربوط شده باشد و با D_f نشان خواهیم داد و برد f آن yهایی از Y است که حداقل یک عضو از X به آن مربوط شده باشد و با R_f نشان خواهیم داد. در صورتی که $D_f = X$، f را تابعی بر X و اگر $R_f = Y$، f را تابعی پوشا یا بروی خواهیم گفت.

۲۸.۱ **تعریف.** هرگاه تابعی یک به یک بر A بروی B موجود باشد می‌گوییم تناظری یک به یک بین A و B برقرار است یا گوییم A با B همعدد است و می‌نویسیم $A \sim B$.

رابطه‌ی همعدد بودن دارای خواص زیر است

۱) منعکس است. یعنی به ازای هر A، $A \sim A$.

۲) متقارن است. یعنی به ازای A و B، اگر $A \sim B$، آنگاه $B \sim A$.

۳) متعدی است. یعنی به ازای هر A، B و C، اگر $A \sim B$ و $B \sim C$ آنگاه $A \sim C$.

پس $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲۹.۱ **تعریف.** به ازای هر عدد طبیعی مانند k، N_k را چنین تعریف می‌کنیم

$$N_k = \{n : n \in \mathbb{N}, n \leq k\}$$

به ازای هر مجموعه مانند A.

۱) A را متناهی خوانیم هرگاه kای باشد که $A \sim N_k$. (مجموعه تهی را نیز متناهی فرض می‌کنیم).

۲) A را نامتناهی خوانیم هرگاه متناهی نباشد.

۳) A را شمارش‌پذیر گوییم در صورتی که $A \sim \mathbb{N}$.

۴) A را شمارش ناپذیر گوییم در صورتی که نه متناهی و نه شمارش‌پذیر باشد.

۵) A را حداکثر شمارش پذیر خوانیم در صورتی که متناهی یا شمارش‌پذیر باشد.

۳۰.۱ **مثال.** مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{I}$ شمارش‌پذیر است، زیرا تناظر زیر بین $\mathbb{N}$ و $\mathbb{I}$ موجود است.

$\mathbb{N}$:	۱	۲	۳	۴	۵	...
$\mathbb{I}$:	۰	۱	-۱	۲	-۲	...

یعنی می‌توان تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{I}$ را با ضابطه‌ی

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{۲} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -\frac{n-۱}{۲} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

درنظر گرفت که تابعی یک به یک و پوشا بر $\mathbb{N}$ بروی $\mathbb{I}$ می‌باشد.

توجه. یک مجموعه‌ی متناهی نمی‌تواند با هیچ یک از زیرمجموعه‌های محض خود همعدد باشد، اما در مثال ۳۰.۱ مشاهده کردیم که این مطلب برای مجموعه‌های نامتناهی امکان‌پذیر است. با توجه به مطلب فوق می‌توان مجموعه‌های نامتناهی را چنین تعریف کرد «A را نامتناهی می‌خوانیم در صورتی که با یکی از زیرمجموعه‌های محض خود همعدد باشد».

شمارش‌پذیری و دنباله‌ها

۳۱.۱ **تعریف.** هر تابع از $\mathbb{N}$ بتوی A را یک دنباله از A گویند. می‌توان به جای $\mathbb{N}$، $\mathbb{N}\cup\{۰\}$ را در نظر گرفت. فرض کنید f یک دنباله از A باشد $(f:\mathbb{N}\to A)$ به جای نماد مرسوم $f(n)$ از نماد f_n استفاده می‌کنند.

از نماد $\{f_n\}$ برای نمایش دنباله f نیز استفاده خواهیم کرد. چون هر مجموعه‌ی شمارش‌پذیر برد یک دنباله‌ی یک به یک بر $\mathbb{N}$ است لذا هر مجموعه‌ی شمارش‌پذیر را می‌توان برد یک دنباله‌ی متمایز فرض کرد یا می‌توان هر مجموعه‌ی شمارش‌پذیر را به شکل یک دنباله نوشت.

حال این سوال مطرح است که اگر مجموعه‌ای را بتوان به صورت یک دنباله نوشت لزوماً شمارش‌پذیر است؟

۳۲.۱ **قضیه.** هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی یک مجموعه‌ی شمارش‌پذیر شمارش‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارش‌پذیر و B زیرمجموعه‌ی نامتناهی آن باشد. چون A شمارش‌پذیر است پس دنباله‌ای یک به یک مانند f بر $\mathbb{N}$ بروی A موجود است، در نتیجه $A=\{f_۱,f_۲,f_۳,\ldots\}$. دنباله g بر $\mathbb{N}$ بتوی $\mathbb{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$g(۱)$ را کوچکترین اندیس مانند m تعریف می‌کنیم به طوری که $f_m\in B$. فرض می‌کنیم $g(n)$ $(n\geq ۱)$ تعریف شده باشد. $g(n+۱)$ را کوچکترین اندیس مانند m' تعریف می‌کنیم به طوری که $f_{m'}\in B$ و $m'>f(n)$. بدین طریق تابع gof تابعی یک به یک بر $\mathbb{N}$ بروی B می‌باشد. یعنی B شمارش‌پذیر است.

از قضیه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم که زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی شمارش‌پذیر حداکثر شمارش‌پذیر هستند و مجموعه‌های شمارش‌پذیر کوچکترین مجموعه‌های نامتناهی هستند.

توجه. فرض کنید بخواهیم شمارش‌پذیری مجموعه‌ای نامتناهی مانند E را ثابت کنیم. کافی است تابعی مانند $f:E\to\mathbb{N}$ پیدا کنیم که فقط یک به یک باشد (پوشا بودن لازم نیست) زیرا در این صورت E با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ همعدد می‌شود پس E حداکثر شمارش‌پذیر است. چون E نامتناهی است در نتیجه E شمارش‌پذیر است. ملاحظه می‌کنیم که در این حالت نیازی به پوشا بودن f نداریم.

۳۳.۱ **مثال.** نشان دهید $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارش‌پذیر است.

تابع $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ را با ضابطه‌ی

$$f(m,n)=۲^m\times ۳^n$$

در نظر بگیرید. چون f یک به یک است پس $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارش پذیر است.

دلیل دیگر شمارش‌پذیری $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ آن است که می‌توان آن را به صورت یک دنباله‌ی متمایز نوشت

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}: \quad (۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱),\dots,$$
$$(۱,n),(۲,n-۱),\dots,(n,۱),\dots$$

فرض کنیم A یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد و بتوان آن را به صورت یک دنباله نوشت. در صورتی که A اعضای تکراری داشته باشد آنگاه A با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ همعدد می‌شود. پس A شمارش‌پذیر است. در نتیجه هر مجموعه‌ی نامتناهی را که بتوان به صورت یک دنباله نوشت شمارش‌پذیر است.

۳۴.۱ **تعریف.** فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند به طوری که به ازای هر $\alpha\in A$ زیرمجموعه‌ای از B مانند E_α متناظر باشد. مجموعه‌ای که اعضای آن E_αها باشند با علامت $\{E_\alpha\}$ یا $\{E_\alpha:\alpha\in A\}$ یا $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ و اجتماع و اشتراک کلیه E_αها را به ترتیب با $\bigcup_\alpha E_\alpha$ و $\bigcap_\alpha E_\alpha$ نشان خواهیم داد. در صورتی که $A=\{۱,۲,\dots,n\}$، اجتماع و اشتراک را به صورت $\bigcup_{m=۱}^{n} E_m$ و $\bigcap_{m=۱}^{n} E_m$، و اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد با $\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n$ و $\bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n$ نشان خواهیم داد. علامت ∞ یک نماد است و منظور اجتماع یا اشتراک کلیه‌ی E_nها است.

۳۵.۱ **مثال.** فرض کنیم به ازای هر عدد طبیعی n،

$$E_n=\left(\frac{۱}{n+۱},۱\right), K_n=\left(۰,\frac{۱}{n}\right), H_n=\left[\frac{۱}{n},۲\right]$$

در این صورت داریم

$$\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n=(۰,۱), \quad \bigcap_{n=۱}^{\infty} E_n=(\tfrac{۱}{۲},۱),$$
$$\bigcup_{n=۱}^{\infty} K_n=(۰,۱), \quad \bigcap_{n=۱}^{\infty} K_n=\varnothing,$$
$$\bigcup_{n=۱}^{\infty} H_n=(۰,۲], \quad \bigcap_{n=۱}^{\infty} H_n=[۱,۲].$$

۳۶.۱ **قضیه.** فرض کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های شمارش‌پذیر باشد در این صورت $\bigcup_{n=۱}^{\infty} E_n$ شمارش‌پذیر است. به عبارت دیگر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

برهان. چون به ازای هر n، E_n شمارش‌پذیر است پس می توان نوشت

$$E_۱ = \{x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۱۳}, \ldots\}$$
$$E_۲ = \{x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$E_m = \{x_{m۱}, x_{m۲}, x_{m۳}, \ldots\}$$
$$\vdots$$

حال $\bigcup_{m=۱}^{\infty} E_m$ را می‌توان به صورت یک دنباله نوشت

$$\bigcup_{m=۱}^{\infty} E_m = \{x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۲۱}, x_{۱۳}, x_{۲۲}, x_{۳۱}, \ldots, x_{۱n}, x_{۲n-۱}, \ldots, x_{n۱}, \ldots\}$$

بنابراین شمارش‌پذیر است.

۳۷.۱ تمرین.

۱) ثابت کنید اجتماع متناهی از مجموعه‌های شمارش‌پذیر، شمارش‌پذیر است.

۲) ثابت کنید اجتماع متناهی از مجموعه‌های حداکثر شمارش‌پذیر، حداکثر شمارش‌پذیر است.

۳۸.۱ مثال. نشان می‌دهیم $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارش‌پذیر است. (به مثال ۱ نیز توجه کنید) فرض کنیم

$$E_m = \{(m, ۱), (m, ۲), (m, ۳), \ldots\}$$

واضح است که E_m شمارش‌پذیر است. چون $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{m=۱}^{\infty} E_m$، پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شمارش‌پذیر است.

۳۹.۱ قضیه. فرض کنیم A شمارش‌پذیر باشد. در این صورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، A^n شمارش‌پذیر است.

برهان. چون A شمارش‌پذیر است پس $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, \ldots\}$. به استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم. چون $A^۱ = A$، پس $A^۱$ شمارش‌پذیر است. فرض کنیم A^n شمارش‌پذیر باشد. فرض کنید $E_i = \{(a_i, b) : b \in A^n\}$. پس E_i شمارش‌پذیر است. چون

$$A^{n+۱} = \{(a_i, b) : a_i \in A, b \in A^n\} = \bigcup_{i=۱}^{\infty} E_i$$

پس A^{n+1} شمارش‌پذیر است.

۴۰.۱ تمرین. نشان دهید مجموعه‌ی اعداد گویا شمارش‌پذیر است.

اینک به معرفی چندین مجموعه شمارش‌ناپذیر می‌پردازیم.

۴۱.۱ قضیه. فرض کنیم E مجموعه‌ی کلیه‌ی دنباله‌هایی باشد که برد آنها از ۰ و ۱ تشکیل شده باشد. در این صورت E شمارش‌ناپذیر است.

برهان. (خلف) فرض کنیم A شمارش‌پذیر باشد. پس می‌توان نوشت

$$A = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$$

هر کدام از f_nها یک دنباله به شکل $f_n : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ می‌باشند. حال دنباله g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$g(n) = 0 \text{ اگر } f_n(n) = 1 \text{ و } g(n) = 1 \text{ اگر } f_n(n) = 0،$$

چون برد g از ۰ و ۱ تشکیل شده است پس $g \in A$، اما به ازای هر n، $g \neq f_n$، پس $g \notin A$ و این یک تناقض است.

۴۲.۱ تمرین. فرض کنیم E مجموعه‌ی xهایی از $[0, 1]$ باشد که بسط اعشاری آنها فقط از ارقام ۳ و ۵ تشکیل شده باشد. نشان دهید E شمارش‌ناپذیر است.

رابطه‌ی $E \subseteq (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ نشان می‌دهد که $(0, 1)$ و $\mathbb{R}$ شمارش‌ناپذیر هستند.

۴۳.۱ مثال. نشان می‌دهیم هر مجموعه‌ی نامتناهی حاوی یک زیرمجموعه‌ی شمارش‌پذیر است. فرض کنیم A نامتناهی باشد پس $A \neq \varnothing$، عضوی از A انتخاب کرده و a_1 می‌نامیم. چون $A - \{a_1\}$ نامتناهی است پس ناتهی است. عضوی از آن انتخاب کرده و a_2 می‌نامیم. فرض کنیم a_1، a_2، ...، a_n از A انتخاب شده باشند. چون $A - \{a_1, \ldots, a_n\}$ نامتناهی است پس ناتهی است عضوی از آن مانند a_{n+1} را انتخاب می‌کنیم. بدین طریق به استقراء زیرمجموعه‌ی شمارش‌پذیر $B = \{a_1, a_2, \ldots\}$ انتخاب می‌شود.

۴۴.۱ تمرین.

۱) فرض کنید A نامتناهی باشد و $a \in A$ ثابت کنید $A \sim A - \{a\}$.

۲) فرض کنید A نامتناهی باشد و B زیرمجموعه‌ی متناهی A باشد. ثابت کنید $A \sim A - B$.

۳) فرض کنید A شمارش‌ناپذیر و B زیرمجموعه‌ی شمارش‌پذیر از A باشد. ثابت کنید $A \sim A - B$.

۴) ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد گنگ شمارش‌ناپذیر است.

۵) عدد مختلط z را جبری گویند هرگاه z ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد جبری شمارش‌پذیر است.

٦) ثابت کنید مجموعه‌ی کلیه‌ی بازه‌هایی که مرکز و شعاع آنها گویا باشد شمارش‌پذیر است.

فصل ۲

فضاهای متری

مقدمه

در ریاضیات عمومی با مفاهیم حد و پیوستگی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی آشنا شدیم. مفهوم فاصله در $\mathbb{R}$ در تعریف حد نقش مهمی ایفا می‌کرد. فضاهای[۱] متری مجموعه‌هایی هستند که در آنها مفهوم فاصله بین نقاط تعریف شده و می‌توان مفاهیم حد و پیوستگی و همگرایی را به چنین مجموعه‌ها توسیع داد. در هر قسمت مطالب و تعاریف با مثال‌های متنوع روشن شده است و تمرینهایی برای خودآزمایی آورده شده است. تمرینهایی که با علامت $*$ مشخص شده است، شامل مطالبی است که در فصل‌های بعدی ارائه می‌شود. می‌توان بررسی آنها را به قسمتهای بعد موکول کرد.

۱.۲ **تعریف.** فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی بوده و d تابعی از $X \times X$ به $\mathbb{R}$ باشد، d را یک متریک یا یک متر یا یک تابع فاصله خوانیم هرگاه در شرایط سه گانه‌ی زیر صدق کند:

(آ) به ازای هر x و y از X، $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(ب) به ازای هر x و y از X، $d(x,y) = d(y,x)$.

(پ) به ازای هر x، y و z از X،

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \text{(نامساوی مثلثی)}$$

[۱] فضاهای متری در ۱۹۰۶ توسط م. فِرِشه (M. Fréchet) معرفی شد.

مجموعه‌ی X با تابع d را یک فضای متری گوییم، یا گوییم X و d تشکیل یک فضای متری می‌دهند و با نماد (X,d) نمایش خواهیم داد و برای سادگی فضای متری X خواهیم گفت. توجه کنید می‌توان چندین متر متفاوت بر یک مجموعه‌ی نامتناهی تعریف کرد و فضاهای متری مختلفی را به دست آورد. مثال زیر مثالی است که ایده‌ی تعریف فضای متری از آن گرفته شده است.

۲.۲ چند مثال

مثال ۱. $\mathbb{R}$ با تابع $d(x,y)=|x-y|$ در شرایط فضای متری صدق می‌کند که فضای متری معمولی $\mathbb{R}$ یا فضای متری اقلیدسی $\mathbb{R}$ نامند. (بررسی کنید)

مثال ۲. تابع d در $\mathbb{R}^n$، با ضابطه‌ی

$$d(x,y)=|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

که در آن $x=(x_1,\ldots,x_n)$، $y=(y_1,\ldots,y_n)$ دو عضو دلخواه از $\mathbb{R}^n$ هستند تشکیل یک فضای متری می‌دهد که فضای متری معمولی یا اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ گویند.

مثال ۳. فرض کنید $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط باشد. تعریف می‌کنیم

$$d_1(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$$

$$d_2(z_1,z_2)=\begin{cases}|z_1|+|z_2| & , \quad z_1\neq z_2 \text{ اگر}\\ 0 & , \quad z_1=z_2 \text{ اگر}\end{cases}$$

در این صورت $\mathbb{C}$ با هر دو تشکیل فضای متری می‌دهد.

مثال ۴. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی دلخواهی باشد. تابع d در X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & , \quad x=y \text{ اگر}\\ 1 & , \quad x\neq y \text{ اگر}\end{cases}$$

خواص (آ) و (ب) تعریف فضای متری با توجه به تعریف d بدیهی است، صحت شرط (پ) را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم x، y و z سه عنصر دلخواه از X باشند، ثابت می‌کنیم

$$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y),$$

هرگاه $x = y$، آنگاه طرف چپ نامساوی صفر است، چون طرف راست حداقل صفر است، پس برقرار است. هرگاه $x \neq y$، آنگاه طرف چپ یک است و چون $x \neq z$ یا $y \neq z$ پس طرف راست حداقل یک است. در نتیجه حکم برقرار است.

فضای متری فوق را فضای متری مجزا یا فضای متری گسسته نامند.

۳.۲ تمرین.

۱) $\mathbb{R}$ با کدام یک از توابع زیر تشکیل فضای متری می‌دهد؟

$$\begin{aligned} d_۱(x,y) &= (x-y)^۲ \\ d_۲(x,y) &= \sqrt{|x-y|} \\ d_۳(x,y) &= |x^۲ - y^۲| \\ d_۴(x,y) &= |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\ d_۵(x,y) &= \frac{|x-y|}{۱+|x-y|} \end{aligned}$$

۲) $\mathbb{R}^۲$ با کدام یک از توابع زیر تشکیل یک فضای متری می‌دهد؟ به ازای هر $x = (x_۱, x_۲)$، $y = (y_۱, y_۲)$

$$\begin{aligned} d_۱(x,y) &= |x_۱ - y_۱| + |x_۲ - y_۲| \\ d_۲(x,y) &= \max\{|x_۱ - y_۱|, |x_۲ - y_۲|\} \\ d_۳(x,y) &= \min\{|x_۱ - y_۱|, |x_۲ - y_۲|\} \end{aligned}$$

۳) فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد و d تابعی از $X \times X$ به $\mathbb{R}$ باشد که در شرایط دوگانه‌ی زیر صدق کند:

(آ) $d(x,y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$

(ب) به ازای هر x، y و z از X،

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$$

نشان دهید (X,d) یک فضای متری است.

[راهنمایی: با انتخاب $y = x$ در(ب) نتیجه شود، $d(x,y) \geq ۰$، برای‌اثبات تقارن در (ب) x را برابر z بگیرید نتیجه می‌شود، $d(x,y) \leq d(y,x)$ با تعویض x با y، تقارن به دست می‌آید]

نشان دهید هرگاه شرط (آ) با $d(x,y) = ۰$ هرگاه $x = y$، عوض شود (X,d) یک فضای متری نخواهد شد.

۴) فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد نشان دهید به ازای هر x، y و z

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

۵) فرض کنید d یک متریک بر X باشد، ثابت کنید

$$d_۱(x,y) = \min\{d(x,y), ۱\}$$

یک متریک کراندار[۱] بر X است.

٦) فرض کنیم $X = \{(x_۱,x_۲) | \; x_۱^۲ + x_۲^۲ = ۱\}$ (یعنی دایره به مرکز $(۰,۰)$ و به شعاع ۱) به ازای هر x و y از X، $d(x,y)$ را طول کمان کوچکتری که نقطه x را به y وصل کند. تعریف کنید آیا (X,d) یک فضای متری است؟ (این تمرین را به کره نیز تعمیم دهید.)

*۷) فرض کنید $C[۰,۱]$ مجموعه‌ی توابع مختلط پیوسته[۲] بر $[۰,۱]$ باشد. $C[۰,۱]$ با کدام یک از توابع زیر تشکیل فضای متری می‌دهد؟

$$\begin{aligned} d_n(f,g) &= \left[\int_۰^۱ |f(x) - g(x)|^n \, dx\right]^{\frac{۱}{n}} \\ p(f,g) &= \sup\{|f(x) - g(x)| : \; ۰ \leq x \leq ۱\} \end{aligned}$$

۸) فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد کدام یک از توابع زیر یک متریک در X است؟

$$\rho(x,y) = \quad d^\alpha(x,y) \quad , \; ۰ < \alpha \leq ۱$$

[۱] یعنی عددی مانند $k > ۰$ باشد که به ازای هر x و y، $d(x,y) \leq k$.
[۲] ثابت خواهیم کرد چنین توابعی کراندارند.

$$p(x,y) = \quad d^{\alpha}(x,y) \quad , \ ۱ < \alpha$$
$$d_n(x,y) = \quad \frac{d(x,y)}{۱+n\,d(x,y)} \quad , \ n \in \mathbb{N}$$

*۹) فرض کنید X مجموعه‌ی توابع مختلط انتگرال‌پذیر بر $[a,b]$ باشد آیا X با تابع زیر تشکیل فضای متری می‌دهد؟

$$d_n(f,g) = \sqrt[n]{\int_a^b |f(x)-g(x)|^n\,dx}$$

۱۰) فرض کنید $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ تابع f بر $\mathbb{R}^*$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱+|x|} & , \quad -\infty < x < \infty \\ ۱ & , \quad x = \infty \\ -۱ & , \quad x = -\infty \end{cases}$$

فرض کنید $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$. نشان دهید d یک متریک کراندار است.

*۱۱) فرض کنید $l_۲$ مجموعه‌ی کلیه‌ی دنباله‌هایی مانند $\{x_n\}_۱^\infty$ باشد که $\sum_۱^\infty x_n^۲$ همگرا باشد. تعریف می‌کنیم

$$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \left[\sum_۱^\infty (x_n - y_n)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

نشان دهید $(l_۲, d)$ یک فضای متری است.

فضای متری $(l_۲, d)$ را یک فضای هیلبرت گویند.

۴.۲ **تعریف.** فرض کنید (X,d) یک فضای متری بوده و p نقطه‌ای دلخواه از X باشد همسایگی p به شعاع $\delta > ۰$ مجموعه‌ی نقاطی مانند x از X است به طوری که $d(x,p) < \delta$، و آن را با علامت $N_\delta(p)$ نشان می‌دهیم، به عبارت دیگر

$$N_\delta(p) = \{x|\ d(x,p) < \delta,\ x \in X\}$$

و مجموعه‌ی

$$N_\delta^*(p) = \{x|\ ۰ < d(x,p) < \delta,\ x \in X\}$$

را همسایگی سفته یا محذوف p گوییم.

۵.۲ چند مثال

مثال ۱. $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی را در نظر بگیرید

$$N_۱(۰) = (-۱, ۱)$$

$$N_۱(۱/۵) = (۰/۵, ۲/۵)$$

مثال ۲. $\mathbb{R}^۲$ با متر اقلیدسی را در نظر بگیرید. همسایگی نقطه $A(a_۱, a_۲)$ به شعاع δ عبارت است از مجموعه‌ی نقاط داخلی دایره به مرکز A به شعاع δ،

$$N_\delta(A) = \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x-a_۱)^۲ + (y-a_۲)^۲} < \delta\right\}$$

در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ هر همسایگی مجموعه‌ی نقاط داخلی یک کره است.
در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ همسایگی را یک گوی نیز نامند.
مثال ۳. فرض کنید X یک فضای متری مجزا باشد (مثال ۴ از ۲.۲) به ازای هر $p \in X$،

$$N_۱(p) = \{x|\ d(x,p) < ۱\} = \{p\}$$

$$N_{۱/۵}(p) = \{x|\ d(x,p) < ۱/۵\} = X$$

به طور کلی می‌توان گفت

$$N_r(p) = \begin{cases} \{p\}, & r \leq ۱ \\ X, & r > ۱ \end{cases}$$

یعنی

(آ) همسایگی که شعاع آن نابیشتر از یک باشد یکانی بوده و فقط شامل خود نقطه است.

(ب) همسایگی که شعاع آن بیشتر از یک باشد، خود فضای متری است.

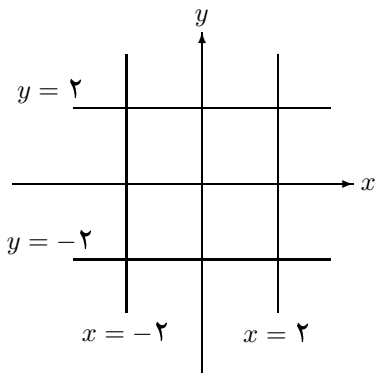
مثال ۴. $\mathbb{R}^2$ با متر ماکزیمم یعنی به ازای هر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$،

$$d(A,B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

را در نظر بگیرید همسایگی $O(0,0)$ به شعاع ۲ عبارت است از

$$\begin{aligned} N_2(O) &= \{(x,y) | \max\{|x-0|, |y-0|\} < 2\} \\ &= \{(x,y) || x| < 2, |y| < 2\} \\ &= [-2,2] \times [-2,2] \end{aligned}$$

یعنی نقاطی داخلی یک مربع



مثال ۵. ملاحظه کردید که هر همسایگی در $\mathbb{R}^3$ درون یک کره است، در حالی که با متر

$$A(a_1, a_2, a_3)\,,\ B(b_1, b_2, b_3)$$
$$d(A,B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, |a_3 - b_3|\}$$

یک مکعب است با متر $d'(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 + b_3|$ چیست؟

۶.۲ تعریف. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از فضای متری X باشد. نقطه $p \in X$ را یک نقطه‌ی حدّی E گوییم هرگاه هر همسایگی سفته‌ی p، E را قطع کند. مجموعه‌ی نقاط حدّی E را با E' نشان می‌دهیم. در این تعریف ممکن است p متعلق به E نباشد.

بنابراین نقطه‌ای مانند p (که ممکن است عضو E باشد یا نباشد) در صورتی نقطه‌ی حدّی E است که هر همسایگی p، E را حداقل در یک نقطه‌ی غیر از p یا

حداقل در دو نقطه قطع می‌کند و نقطه‌ای مانند p در صورتی نقطه‌ی حدّی E نیست که حداقل یک همسایگی p، E را در حداکثر یک نقطه (خود p) قطع کند. خلاصه،

$$p \in E' \iff \forall r\,(N_r^*(p) \cap E \neq \varnothing)$$
$$p \notin E' \iff \exists r\,(N_r^*(p) \cap E = \varnothing)$$

و یا

$$p \notin E' \iff \exists r(N_r(p) \cap E = \varnothing \text{ یا } \{p\})$$

۷.۲ چند مثال

مثال ۱. در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی با این که $0 \notin (0,1)$ ولی چون هر همسایگی 0 بازه‌ی $(0,1)$ را قطع می‌کند، پس 0 نقطه‌ی حدّی آن است زیرا:

به ازای هر r، اگر $r \leq 1$ آنگاه $(-r,r) \cap (0,1) = (0,r)$
به ازای هر r، اگر $r > 1$ آنگاه $(-r,r) \cap (0,1) = (0,1)$

توجه کنید که هر نقطه از بازه‌ی $(0,1)$ نقطه‌ی حدّی آن است و چون 0 و 1 نیز نقطه‌ی حدّی آن است پس مجموعه‌ی نقاط حدّی $(0,1)$، $[0,1]$ است.

مثال ۲. در همان فضا مجموعه‌ی اعداد طبیعی نقطه‌ی حدّی ندارد.

زیرا به ازای هرعدد حقیقی مانند x، اشتراک همسایگی $N_{0/5}(x)$ با $\mathbb{N}$ حداکثر یک نقطه است.

مثال ۳. درفضای متری $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی،

(آ) $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow A' = \{0\}$

(ب) $B = \{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow B' = \{1\}$

(پ) نقاط حدّی $\mathbb{Q}$ (اعداد گویا) برابر$\mathbb{R}$ است.

(پ) نقاط حدّی اعداد گنگ برابر $\mathbb{R}$ است.

*(ث) فرض کنید $\{x_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای متمایز و همگرا به α باشد در این صورت α نقطه‌ی حدّی مجموعه‌ی $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ می‌باشد.

۸.۲ تمرین.

۱) مجموعه‌ای مثال بزنید که درست سه نقطه‌ی حدّی داشته باشد.

۲) مجموعه‌ای مثال بزنید که مجموعه‌ی نقاط حدّی آن $\mathbb{N}$ باشد.

۳) نشان دهید در یک فضای متری، اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A' \subseteq B'$.

۴) نقاط حدّی مجموعه‌های زیر را در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ مشخص کنید.

$$\left\{n + \frac{۱}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad \left\{n + \frac{۱}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\left\{\frac{۱}{n} + \frac{۱}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad \left\{\frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۳^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\left\{\frac{۱}{۲^n} + \frac{۱}{۳^m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad \left\{\frac{k}{۲^n} \;\middle|\; n, k \in \mathbb{N},\ k \leq ۲^n\right\}.$$

۵) $\mathbb{R}^۲$ با متر اقلیدسی را در نظر بگیرید. نقاط حدّی مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$\left\{(x, y) \mid y = x^۲\right\},$$
$$\{(x, y) \mid y = \sin x\},$$
$$\{(x, y) \mid y = [x]\},$$
$$\left\{\left(\frac{۱}{n}, \frac{۱}{m}\right) \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\left(\frac{۱}{۲^n}, \frac{۱}{۳^n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\left(\frac{۱}{۲^n}, \frac{۱}{۳^m}\right) \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\left(n, \frac{۱}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{\left(n, \frac{۱}{m}\right) \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\left\{(x, y) \mid\ y = \sin\frac{۱}{x}, x \neq ۰\right\}.$$

٦) مجموعه‌ی X را با متر مجزا در نظر بگیرید و فرض کنید $A \subseteq X$، درباره‌ی نقاط حدّی A چه می‌توان گفت؟

۷) مجموعه $X = (0, 2)$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید. نقاط حدّی مجموعه‌های زیر را بیابید.

$$\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad (0, 1)$$

۹.۲ **تعریف.** $p \in E$ را یک نقطه تنها یا نقطه منفرد E گویند در صورتی که p نقطه‌ی حدّی E نباشد. مثلاً در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، هر نقطه $\mathbb{N}$ نقطه‌ی تنهاست. $\mathbb{Q}$ نقطه‌ی منفرد ندارد. در فضای متری مجزا هر نقطه، نقطه‌ی منفرد است زیرا در این فضا نقطه‌ی حدّی نداریم.

۱۰.۲ **تعریف.** فرض کنید E زیر مجموعه‌ای از فضای متری X باشد. مجموعه‌ی E را بسته خوانیم هرگاه جمیع نقاط حدّی E متعلق به خودش باشد. به عبارت دیگر

$$E \text{ بسته است} \iff E' \subseteq E$$

مثال ۱. در $\mathbb{R}$، $E = [0, 1]$ بسته است زیرا $E' = [0, 1]$. مجموعه‌ی $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ بسته است زیرا شامل تنها نقطه حدّیش است. مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ بسته نیست. مجموعه‌ی اعداد گنگ بسته نیست. بازه‌ی $(0, 1)$ بسته نیست. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\}$ بسته است زیرا $A' = \varnothing$، هر مجموعه‌ی متناهی بسته است (چرا؟).

مثال ۲. در $\mathbb{R}^2$، $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ بسته است زیرا $E' = E$.

فرض کنید $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$. آیا A بسته است؟

فرض کنید $B = \{(x, y) \mid y = [x]\}$. آیا B بسته است؟

در هر فضای متری خود فضا و $\varnothing$ هر دوبسته‌اند (چرا؟)

۱۱.۲ **تعریف.** فرض کنیم X فضای متری و $E \subseteq X$، بست E را با علامت $\bar{E}$ نشان می‌دهیم. عبارت است از اجتماع E با E'، یعنی $\bar{E} = E \cup E'$، ثابت می‌کنیم

$$x \in \bar{E} \iff \forall r (N_r(x) \cap E \neq \varnothing)$$

برهان لزوم. فرض کنید $x \in \bar{E}$ و $r > 0$ دلخواه باشد پس طبق تعریف، $x \in E$ یا $x \in E'$. اگر $x \in E$، آنگاه $x \in N_r(x) \cap E$، پس $N_r(x) \cap E \neq \varnothing$ ولی اگر $x \in E'$، آنگاه طبق تعریف نقطه‌ی حدّی، $N_r^*(x) \cap E \neq \varnothing$ پس $N_r(x) \cap E \neq \varnothing$.

برهان کفایت. فرض کنید به ازای هر r، $N_r(x) \cap E \neq \varnothing$ نشان می‌دهیم $x \in E$ یا $x \in E'$. اگر $x \in E$، حکم برقرار است. فرض کنید $x \notin E$،پس به ازای هر r، $N_r^*(x) \cap E \neq \varnothing$ در نتیجه $x \in E'$.

۱۲.۲ تمرین.

۱) کدام یک از مجموعه‌های تمرینهای ۴ و ۵ از بخش ۸.۲، بسته است؟

۲) فرض کنید X فضای متری مجزا باشد کدام مجموعه‌ها در این فضا بسته است.

۱۳.۲ **تعریف.** فرض کنید X یک فضای متری باشد، $E \subseteq X$، $p \in E$ را نقطه‌ی درونی E گویند هرگاه یک همسایگی p موجود باشد که جزء E باشد یعنی rای باشد که

$$N_r(p) \subseteq E$$

مجموعه‌ی نقاط درونی E را با علامت E° نشان می‌دهیم. بنا بر این

$$p \in E^\circ \iff \exists r(N_r(p) \subseteq E)$$

مثال ۱. در $\mathbb{R}$،

- ۰/۱ نقطه‌ی درونی $(۰, ۱)$ است زیرا $N_{۰/۱}(۰/۱) = (۰, ۰/۲) \subseteq (۰, ۱)$
- هر نقطه از بازه‌ی (a, b) نقطه‌ی درونی آن است.
- نقاط a، b با آن که عضو بازه‌ی $[a, b]$ اند ولی نقطه‌ی درونی آن نیستند.
- هر نقطه‌ی $\mathbb{R}$ درونی است.
- هر نقطه از بازه‌ی $[a, b]$ به جز a، b، نقطه‌ی درونی است.
- مجموعه‌ی اعداد گویا نقطه‌ی درونی ندارد (زیرا $\mathbb{Q}$ شامل هیچ بازه‌ای نیست.)

مثال ۲. در $\mathbb{R}^۲$، مجموعه‌ی نقاط درونی $E = \{(x, y) \mid x^۲ + y^۲ < ۱\}$ برابر خود E است.

۱۴.۲ تمرین.

۱) در $\mathbb{R}^۲$ مجموعه‌ی نقاط درونی مجموعه‌های زیر را مشخص کنید:

$$A = \{(x, y) \mid y = x\} \quad , \quad B = \{(x, y) \mid ۰ < x < ۱,\ y = ۰\}$$

۲) در فضای متری مجزا، A یک مجموعه است، $A^\circ =?$.

۱۵.۲ **تعریف.** در فضای متری X مجموعه E را باز گویند، هرگاه هر نقطه‌ی E نقطه‌ی درونی باشد یعنی

$$E \text{ باز است} \iff E \subseteq E^\circ$$

چون بنا بر تعریف نقطه درونی، همواره $E^\circ \subseteq E$، پس

$$E \text{ باز است} \iff E = E^\circ$$

مثال ۱.

- در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ باز نیستند (یادآوری می‌کنیم که $\mathbb{Q}$ بسته هم نیست)
- مجموعه‌ی $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ نه باز است و نه بسته است.
- بازه‌ی $(0, 1)$ باز است ولی $[0, 1]$ باز نیست.
- در هر فضای متری، خود فضا ومجموعه‌ی $\varnothing$ هر دو بازند (چرا؟).

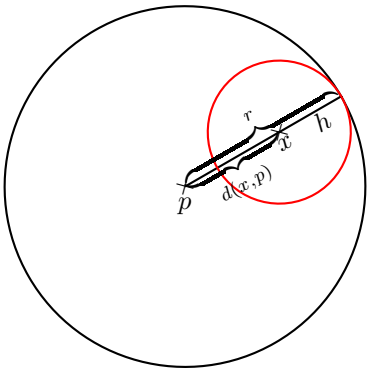
مثال ۲. در فضای متری مجزا هر مجموعه باز است (چرا؟)
مثال ۳. در $\mathbb{R}^2$، مجموعه‌ی $(0, 1) \times (0, 1)$ باز است.
تمرین. فرض کنید $A \subseteq B$، نشان دهید $A^\circ \subseteq B^\circ$.

۱۶.۲ **قضیه.** در هر فضای متری هر همسایگی، یک مجموعه‌ی باز است.

برهان. فرض کنیم $N_r(p)$ یک همسایگی دلخواه نقطه‌ی p در فضای متری X باشد، x نقطه‌ی دلخواهی از $N_r(p)$ بگیرید، با انتخاب $h = r - d(x, p)$ داریم $N_h(x) \subseteq N_r(p)$، زیرا اگر $z \in N_h(x)$ آنگاه $d(z, x) < h$ پس

$$\begin{aligned} d(z, p) &\leq d(z, x) + d(x, p) \\ &\leq h + d(x, p) = r \end{aligned}$$

یعنی $z \in N_r(p)$.



۱۷.۲ **تعریف.** دو متریک d', d بر X را معادل گوییم در صورتی که هر مجموعه‌ی باز در (X, d)، یک مجموعه‌ی باز در (X, d') باشد و برعکس.

مثال ۱. دو متریک

$$d(x, y) = |x - y| \quad , \quad p(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

در $\mathbb{R}$، معادل هستند.

مثال ۲. در $\mathbb{R}$، متر اقلیدسی با متر مجزا معادل نیست زیرا مجموعه‌ی یکانی $\{a\}$ با متریک مجزا یک مجموعه‌ی باز است در حالی که با متریک اقلیدسی $\{a\}$ باز نیست.

مثال ۳. فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد و

$$p(x, y) = \frac{d(x, y)}{۱ + d(x, y)}$$

فرض کنید $r > ۰$ دلخواه باشد و $r_۱ = \frac{r}{۱+r}$، دراین صورت

$$p(x, y) < r_۱ \iff d(x, y) < r \qquad (۱)$$

حال فرض کنید G یک مجموعه‌ی باز در (X, d) باشد نشان می‌دهیم G در (X, p) باز است.

$$\forall x(x \in G \Rightarrow \exists r(N_r(x) \subseteq G))$$

رابطه‌ی (۱) نشان می‌دهد که $N_{r_۱}(x) \subseteq G$. عکس این مطلب به طریق مشابه است.

تمرین. فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد و $p(x,y) = \min\{d(x,y), ۱\}$. نشان دهید d با p معادل است.

۱۸.۲ **تعریف.** فرض کنیم X یک فضای متری باشد

(آ) به ازای هر زیر مجموعه مانند E از X، متمم E را با علامت E^c نشان میدهیم.

$$E^c = \{x | x \in X, x \notin E\}$$

(ب) E را کامل خوانیم هرگاه هم بسته باشد و هم هر نقطه‌اش نقطه‌ی حدّی باشد. یعنی

$$E \text{ کامل است} \iff E = E'$$

(پ) E را در X چگال خوانیم هر گاه هر نقطه از X، نقطه‌ای از E یا نقطه‌ی حدّی E باشد. به عبارت دیگر،

$$E \text{ در } X \text{ چگال است.} \iff X \subseteq \bar{E}\,(X = \bar{E})$$

(ت) E را در X کراندار خوانیم هرگاه E جزء یک همسایگی باشد. یعنی

$$\exists N_r(p) : E \subseteq N_r(p)$$

مثال ۱. در فضای متری اقلیدسی $\mathbb{R}$، هر بازه‌ی بسته کامل است، خود $\mathbb{R}$ کامل است، آیا مجموعه‌ی کامل وجود دارد که به صورت بازه نباشد؟

مثال ۲. $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است. فرض کنیم

$$A = \left\{ \frac{k}{۲^n} | k \in \mathbb{I}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

A در $\mathbb{Q}$ چگال است (ثابت کنید) پس A در $\mathbb{R}$ نیز چگال است.

مثال ۳. اعداد گنگ در $\mathbb{R}$ چگال است.

۱۹.۲ **تمرین.**

۱) نشان دهید $\mathbb{Q}^k$ در $\mathbb{R}^k$ چگال است.

۲) کدام مجموعه‌ها در فضای متری مجزا کراندار است؟

۳) فرض کنید $(X_۱, d_۱)$ و $(X_۲, d_۲)$ دو فضای متری باشند و $X = X_۱ \times X_۲$. به ازای هر $x = (x_۱, x_۲)$ و $y = (y_۱, y_۲)$، تعریف می‌کنیم

$$d(x, y) = \max\{d_۱(x_۱, y_۱), d_۲(x_۲, y_۲)\}$$

$$p(x, y) = d_۱(x_۱, y_۱) + d_۲(x_۲, y_۲)$$

(آ) نشان دهید X با d و p تشکیل فضای متری می‌دهد.

(ب) نشان دهید همسایگی‌های دو فضا یکسان نیستند امّا d و p معادل هستند.

(پ) قسمت (آ) را به حالتی که X حاصلضرب تعدادی متناهی فضا باشد توسیع دهید.

۴) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از فضای متری X باشد، نشان دهید $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. با مثالی نشان دهید که $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$.

۵) فرض کنید X یک فضای متری باشد، نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی X باز است اگر و تنها اگر مجموعه‌های یکانی باز باشد.

۲۰.۲ **قضیه.** هرگاه p نقطه حدّی مجموعه‌ی E باشد آنگاه اشتراک هر همسایگی p با E نامتناهی نقطه است. به عبارت دیگر:

$$\text{فرض} : \forall r \ (N_r^*(p) \cap E \neq \varnothing)$$

$$\text{حکم} : \forall r \ (N_r(p) \cap E = \{ \text{ نامتناهی نقطه } \})$$

برهان. برای آشنایی دانشجویان با چگونگی استدلال، برهان قضیه به دو طریق بیان می‌شود.

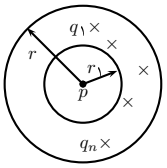
(آ) r را دلخواه در نظر می‌گیریم، بنا بر تعریف نقطه‌ی حدّی $N_r^*(p) \cap E \neq \varnothing$، یک نقطه از آن انتخاب کنیم $x_۱$ می‌نامیم. با انتخاب $r_۱ = d(p, x_۱)$، باید $N_{r_۱}^*(p) \cap E \neq \varnothing$، نقطه‌ای انتخاب می‌کنیم $x_۲$ می‌نامیم. فرض کنیم x_k انتخاب شده باشد و $r_k = d(p, x_k)$، چون $N_{r_k}^*(p) \cap E \neq \varnothing$، نقطه $x_{k+۱}$ از آن می‌گیریم. بدین ترتیب به استقراء دنباله x_k انتخاب شد. چون x_kها متمایزند و

$$\forall k \quad N_{r_k}(p) \subseteq N_r(p)$$

پس مجموعه‌ی نامتناهی $A = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ $(A \sim \mathbb{N})$ انتخاب شد به طوری که

$$A \subseteq N_r(p) \cap E.$$

(ب) (برهان خلف) فرض کنیم rی باشد که اشتراک $N_r^*(p)$ با E متناهی نقطه مثلاً شامل q_1، q_2، ...، q_n باشد، با انتخاب $r_1 = \min_{1 \le i \le n} d(p, q_i)$، نتیجه می‌شود $N_{r_1}^*(p) \cap E = \varnothing$ و این خلاف حدّی بودن نقطه‌ی p است.



نتیجه. هیچ مجموعه‌ی متناهی نقطه‌ی حدّی ندارد.

۲۱.۲ قضیه. فرض کنیم $\{E_\alpha\}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌ها باشد در این صورت

(آ) $(\bigcup_\alpha E_\alpha)^c = \bigcap_\alpha E_\alpha^c$

(ب) $(\bigcap_\alpha E_\alpha)^c = \bigcup_\alpha E_\alpha^c$

برهان به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

همان طور که در طی مثالهای قبل مشاهده گردید یک مجموعه ممکن است هم باز و هم بسته باشد. قضیه زیر اطلاع بیشتری درباره‌ی این مطلب ارائه می‌دهد.

۲۲.۲ قضیه. مجموعه E باز است اگر و فقط اگر E^c بسته باشد.

برهان لزوم. فرض کنیم E باز باشد نشان می‌دهیم E^c بسته است. هرگاه p نقطه‌ی حدّی دلخواهی از E^c باشد p نمی‌تواند متعلق به E باشد زیرا اگر $p \in E$ آنگاه چون E باز است پس p نقطه‌ی درونی E است یعنی rی هست که $N_r(p) \subseteq E$ پس $N_r(p) \cap E^c = \varnothing$، و این خلاف حدّی بودن است. پس $p \in E^c$.

برهان کفایت. فرض کنیم E^c بسته باشد. نشان می‌دهیم E باز است. فرض کنید p نقطه‌ی دلخواهی از E باشد پس $p \notin E^c$، چون $(E^c)' \subseteq E^c$ در نتیجه $p \notin (E^c)'$، بنابراین r ای هست $N_r(p) \cap E^c = \varnothing$ و یا $N_r(p) \subseteq E$.

مثال ۱. فرض کنید $(X.d)$ یک فضای متری باشد. طبق تعریف X باز است. بنابراین $\varnothing$ بسته است.

همچنین $X' \subseteq X$، پس X، بسته است. در نتیجه $\varnothing$ باز است.

مثال ۲. چون $\varnothing' = \varnothing$ پس $\varnothing$ بسته است و X باز است. چون $\varnothing = (\varnothing)^\circ$ پس $\varnothing$ باز است و X بسته است.

۲۳.۲ قضیه.

(آ) اجتماع هر دسته از مجموعه‌های باز، باز است.

(ب) اشتراک هر دسته‌ی متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

(پ) اجتماع هر دسته‌ی متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

(ت) اشتراک هر دسته از مجموعه‌های بسته، بسته است.

برهان.

(آ). فرض کنیم $\{E_\alpha\}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌های باز باشد. نشان می‌دهیم $\bigcup_\alpha E_\alpha$ باز است. فرض کنیم x نقطه‌ی دلخواهی از $\bigcup_\alpha E_\alpha$ باشد، پس α_1 ای هست که $x \in E_{\alpha_1}$ چون E_{α_1} باز است، پس

$$\exists r \quad (N_r(x) \subseteq E_{\alpha_1})$$

بنابراین

$$N_r(x) \subseteq \bigcup_\alpha E_\alpha$$

(ب) فرض کنیم E_1، E_2،... و E_n تعداد متناهی مجموعه‌ی باز باشد. نشان می‌دهیم $\bigcap_{i=1}^n E_i$ باز است. فرض کنیم $x \in \bigcap_1^n E_i$ و دلخواه باشد، پس به ازای هر $i\,(1 \leq i \leq n)$، $x \in E_i$ چون E_i باز است، پس r_i ای هست که $N_{r_i}(x) \subseteq E_i$، حال با انتخاب $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$ داریم $N_r(x) \subseteq N_{r_i}(x) \subseteq E_i$. بنابراین $N_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n E_i$

قسمتهای (پ) و (ت) این قضیه با استفاده از قضیه ۲۱.۲ و متمم گیری به دست می‌آید که فقط قسمت (ت) را اثبات می‌کنیم و قسمت (پ) را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

(ت) فرض کنیم $\{F_\alpha\}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد پس به ازای هر α، F_α^c باز است. در نتیجه بنا به (آ)، $\bigcup_\alpha F_\alpha^c$ باز است چون $\bigcup_\alpha F_\alpha^c = (\bigcap_\alpha F_\alpha)^c$ در نتیجه $\bigcap_\alpha F_\alpha$ بسته است.

حال نشان می‌دهیم در قضیه قبل متناهی بودن تعداد، در قسمتهای (ب) و(پ) ضروری است. فرض کنید $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$، I_n مجموعه‌ای باز است امّا $\bigcap_1^\infty I_n = \{0\}$ باز نیست. بنابر این اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های باز الزاماً باز نیست. با فرض $C_n = [\frac{1}{n}, 1]$، C_n بسته است ولی چون $\bigcup_1^\infty C_n = (0, 1]$، پس $\bigcup_1^\infty C_n$ بسته نیست یعنی، اجتماع هر تعداد از مجموعه‌های بسته الزاماً بسته نیست.

تمرین. قسمت (پ) در قضیه‌ی قبل را به دو روش زیر ثابت کنید.

(آ) با استفاده از (ب)، و متمم گیری.

(ب) با استفاده از تعریف مجموعه‌ی بسته.

۲۴.۲ مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$.

ثابت کردیم اجتماع هر تعداد از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است. برعکس، هرگاه E یک مجموعه‌ی باز در فضای X باشد، آنگاه به ازای هر $x \in E$، r_xای هست که $N_{r_x}(x) \subseteq E$، می‌توان نوشت

$$E = \bigcup_{x \in E} N_{r_x}(x)$$

یعنی، هر مجموعه‌ی باز به صورت اجتماعی از همسایگی ها می‌باشد. قضیه‌ی زیر اطلاعات بهتری درباره‌ی مجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ ارائه می‌کند.

۲۵.۲ **قضیه.** هر مجموعه‌ی باز و ناتهی در $\mathbb{R}$ به صورت اجتماع حداکثر شمارش پذیر از بازه‌های باز و دو به دو متمایز می‌باشد.

برهان. فرض کنید $C \subseteq \mathbb{R}$ و C باز و ناتهی باشد. به ازای هر $x \in C$، بازه‌ی بازی مانند I موجود است که $x \in I \subseteq C$.

فرض کنید I_x اجتماع کلیه‌ی آن بازه‌ها باشد یعنی

$$I_x = \bigcup \{I : x \in I \subseteq C\}$$

واضح است که I_x بازه‌ی بازی شامل x است و $I_x \subseteq C$. فرض کنید که y نقطه‌ی دیگری از C باشد اگر $y \in I_x$ آنگاه $I_x = I_y$. بنابراین به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز از C مانند x و y، I_x و I_y یا از هم جدا هستند و یا برابر هستند. حال فرض کنید F مجموعه‌ی کلیه‌ی بازه‌های متمایز مانند I_x باشد واضح است که C برابر اجتماع بازه‌های F است کافی است نشان دهیم F حداکثر شمارش پذیر است.

تابع g بر F به $\mathbb{Q}$ را چنین تعریف می‌کنیم:
به ازای هر $I_x \in F$، فقط یک عدد گویا از I_x می‌گیریم و $r(I_x)$ می‌نامیم، تعریف می‌کنیم $g(I_x) = r(I_x)$، نشان می‌دهیم g یک به یک است.
به ازای هر I_x و I_y، $I_x \neq I_y$. چون $I_x \cap I_y = \varnothing$، پس $r(I_x) \neq r(I_y)$، یعنی

$$g(I_x) \neq g(I_y)$$

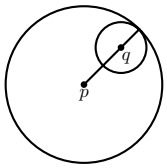
۲۶.۲ قضیه. فرض کنیم E زیر مجموعه‌ای از فضای متری X باشد و $N_r(p)$ همسایگی دلخواهی از X را در نظر بگیرید. نشان دهید هرگاه $N_r(p) \cap E = \varnothing$، آنگاه $N_r(p) \cap E' = \varnothing$. یعنی

«هر همسایگی که E را قطع نکند E' را هم قطع نمی‌کند.»

برهان. فرض کنیم rی باشد که $N_r(p) \cap E = \varnothing$ ولی $N_r(p) \cap E' \neq \varnothing$، q را از این اشتراک می‌گیریم. با انتخاب $h = r - d(p,q)$، چون $N_h(q) \subseteq N_r(p)$ پس

$$N_h(q) \cap E = \varnothing$$

و این خلاف حدّی بودن نقطه‌ی q است.



۲۷.۲ قضیه. هر گاه X یک فضای متری باشد و $E \subseteq X$، آنگاه

(آ) $\bar{E}$ بسته است.

(ب) $E = \bar{E}$ و اگر فقط اگر E بسته باشد.

(پ) به ازای هر مجموعه‌ی بسته مانند F اگر $E \subseteq F$، آنگاه $\bar{E} \subseteq F$ (به عبارت دیگر $\bar{E}$ «کوچکترین» مجموعه‌ی بسته‌ی شامل E است).

برهان (آ). نشان می‌دهیم متمم $\bar{E}$ باز است. فرض کنیم $p \in (\bar{E})^c$ پس $p \notin (\bar{E})$ در نتیجه p نه نقطه‌ای از E و نه نقطه‌ی حدّی E است. پس rی هست که $N_r(p) \cap E = \varnothing$ بنابر قضیه ۲۶.۲، $N_r(p) \cap E' = \varnothing$ در نتیجه

$$N_r(p) \cap \bar{E} = N_r(p) \cap (E \cup E') = (N_r(p) \cap E) \cup (N_r(p) \cap E') = \varnothing$$

$$N_r(p) \subseteq (\bar{E})^c$$

برهان (ب). اگر $E = \bar{E}$ آنگاه بنابه (آ)، E بسته است.
اگر E بسته باشد آنگاه $E' \subseteq E$ پس $\bar{E} = E \cup E' = E$.
برهان (پ). چون $E \subseteq F$ پس $E' \subseteq F'$ درنتیجه $E \cup E' \subseteq F \cup F'$ یا $\bar{E} \subseteq \bar{F} = F$.

۲۸.۲ **قضیه.** فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای ناتهی و از بالا کراندار از اعداد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $\alpha = \sup E$. در این صورت $\alpha \in \bar{E}$. لذا اگر E بسته باشد، $\alpha \in E$.

برهان. فرض کنید $r > 0$ و دلخواه باشد چون $\alpha - r$ کران بالای E نیست پس عضوی مانند y از E هست که $\alpha - r < y$، پس $y \in N_r(\alpha) \cap E$. یعنی $\alpha \in \bar{E}$.
بنابراین، سوپرمم یا اینفیمم یک مجموعه عضو آن یا نقطه‌ی حدّی آن است.

۲۹.۲ **تعریف.** (زیرفضا) فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد. هر زیرمجموعه‌ی ناتهی مانند Y، با تابع d تشکیل فضای متری می‌دهد. (Y, d) را زیر فضای (X, d) گویند. مثلاً $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی زیر فضای $\mathbb{R}$ است.
مجموعه $Y = [0, 1)$ نیز با متر اقلیدسی یک زیر فضای متری $\mathbb{R}$ است.

رابطه‌ی بین همسایگی ها

فرض کنیم $a \in Y \subseteq X$، r عدد حقیقی دلخواهی باشد همسایگی در زیرفضا را با علامت $N_r^Y(a)$ نشان می‌دهیم.

$$N_r^Y(a) = \{x | d(x, a) < r \, , x \in Y\}$$

$$N_r(a) = \{x | d(x, a) < r \, , x \in X\}$$

پس $N_r^Y(a) = N_r(a) \cap Y$. مثلاً فرض کنیم $Y = [۰, ۱)$ زیر فضای فضای متری $\mathbb{R}$ باشد؛

$$N_{۰/۵}(۰) = (-۰/۵, +۰/۵)$$

$$N_{۰/۵}^Y(۰) = [۰, +۰/۵)$$

رابطه‌ی بین مجموعه‌های باز و بسته‌ی فضا و زیرفضا

۳۰.۲ قضیه. فرض کنید X یک فضای متری و Y زیر فضای آن باشد و $E \subseteq Y$ در این صورت E در Y باز است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی بازی از X مانند C باشد به طوری که $E = C \cap Y$.

برهان لزوم. فرض کنیم E نسبت به Y باز باشد یعنی به ازای هر p از E، r_p ی هست که $N_{r_p}^Y(p) \subseteq E$. پس می‌توان نوشت

$$E = \bigcup_{p \in E} N_{r_p}^Y(p) = \bigcup_{p \in E} (N_r(p) \cap Y) = Y \cap (\bigcup_{p \in E} N_r(p)) = Y \cap C$$

پس $C = \bigcup_{p \in E} N_r(p)$ را پیدا کردیم که هم در X باز است و هم $E = Y \cap C$.

برهان کفایت. فرض کنیم مجموعه‌ی بازی از X مانند C باشد به طوری که $E = Y \cap C$. نشان می‌دهیم E در Y باز است. فرض کنید$p \in E$. پس $p \in C$، C باز است پس r ی هست که

$$N_r(p) \subseteq C$$

و یا

$$N_r^Y(p) = N_r(p) \cap Y \subseteq C \cap Y = E$$

۳۱.۲ نتیجه. $E \subseteq Y \subseteq X$. E در Y بسته است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی بسته‌ای مانند C از X باشد به طوری که $E = Y \cap C$.

برهان. فرض کنید E در Y بسته باشد پس E^c (متمم E نسبت به Y) در Y باز است. بنا بر قضیه‌ی فوق مجموعه‌ی بازی ازX مانند C هست که $E^c = C \cap Y$ و یا $E = C^c \cap Y$.[۱]

[۱] در برهان فوق، E^c به معنی متمم E در فضای Y است در حالی که C^c. متمم C در فضای X است و به همین طریق در قسمت کفایت، به برهان (۱) توجه کنید.

$$x \in E \iff x \notin E^c \iff x \notin C \iff x \in C^c \iff x \in C^c \cap Y$$

پس $F = C^c$ مجموعه‌ی بسته‌ای که پیدا کردیم و ثابت کردیم $E = F \cap Y$.
برعکس، فرض کنیم مجموعه‌ی بسته‌ای از X مانند F باشد که $E = F \cap Y$. در نتیجه $E^c = F^c \cap Y$، چون F^c در X باز است پس E^c در Y باز است. بنابراین E در Y بسته است.

مثال. فرض کنید E اعداد گویای بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ باشد در این صورت

- E در $\mathbb{Q}$ باز است زیرا $E = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$.
- E در Q بسته است زیرا $E = \mathbb{Q} \cap [\sqrt{۲}, \sqrt{۳}]$.

پس E در $\mathbb{Q}$ هم باز است و هم بسته است در حالی که E به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$، در $\mathbb{R}$ نه باز است و نه بسته است (چرا؟)

تمرین.

۱) با توجه به تعریف ثابت کنید

(آ) E در $\mathbb{Q}$ هم باز است و هم بسته است.

(ب) E در $\mathbb{R}$ نه باز است و نه بسته است.

مجموعه‌های فشرده

۳۲.۲ تعریف. فرض کنید $\{C_\alpha\}_\alpha$ مجموعه‌ای از مجموعه‌های باز فضای متری X باشد گویند $\{C_\alpha\}$ یک پوشش باز $E \subseteq X$ است هرگاه $E \subseteq \bigcup_\alpha C_\alpha$.

۳۳.۲ چند مثال.

- در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، چون $(۰, ۱) \subseteq (۰, ۱)$، پس $\{(۰, ۱)\}$ یک پوشش باز تک عضوی $(۰, ۱)$ است.
- چون $(۰, ۱) \subseteq (-۱, ۰/۵) \cup (۰, ۲)$، پس $\{(-۱, ۰/۵), (۰, ۲)\}$ یک پوشش باز $(۰, ۱)$ است.
- با فرض $(n \in \mathbb{N})\, I_n = (\frac{۱}{n}, ۱)$، چون $(۰, ۱) \subseteq \bigcup_{r=۱}^{\infty} I_n$ پس $\{I_n\}$ یک پوشش باز شمارش پذیر $(۰, ۱)$ است.
- فرض کنید $E_x = (۰, x)$ که $۰ < x \leq ۱$ دراین صورت $(۰, ۱) \subseteq \bigcup_{۰<x\leq ۱} I_x$ پس $\{I_n\}$ یک پوشش شمارش ناپذیر $(۰, ۱)$ است.

$\mathbb{R}$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید

- چون $\mathbb{N} \subseteq (۰,\infty)$، پس $F_۱ = \{(۰,\infty)\}$ یک پوشش باز متناهی $\mathbb{N}$ است.
- با فرض $(n \in \mathbb{N})\ I_n = (۰,n)$، $F_۲ = \{I_n\}_۱^\infty$ یک پوشش باز شمارش پذیر $\mathbb{N}$ است.
- با فرض $(n \in \mathbb{N})\ C_n = (n-\frac{۱}{۴}, n+\frac{۱}{۴})$، $F_۳ = \{C_n\}_۱^\infty$ یک پوشش باز شمارش‌پذیر و دو به دو متمایز $\mathbb{N}$ است.

توجه. هیچ تعداد متناهی از اعضای $F_۲$ یا $F_۳$ قادر به پوشاندن $\mathbb{N}$ نیست.

$\mathbb{R}$ را با متر مجزا در نظر بگیرید و

- چون $[۰,۱) \subseteq (۰,۱)$ پس $F_۱ = \{[۰,۱)\}$ یک پوشش باز تک عضوی $(۰,۱)$ است.
- چون $(۰,۱) \subseteq [۰,۱]$ پس $F_r = \{\{x\} | ۰ \le x \le ۱\}$ یک پوشش باز شمارش ناپذیر $(۰,۱)$ است.

۳۴.۲ تمرین.

۱) با فرض $A = \{۱, \frac{۱}{۲}, \dots, \frac{۱}{n}, \dots\}$ کدام دسته از مجموعه‌های زیر، پوشش بازی برای A است؟

(آ) $(n \in \mathbb{N}) \quad I_n = \left(\frac{۱}{n+۱}, \frac{n}{n+۱}\right)$

(ب) $(n \in \mathbb{N}) \quad J_n = \left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{(n+۱)^۲}, \frac{۱}{n} + \frac{n}{(n+۱)^۲}\right)$

(پ) $(n \in \mathbb{N}) \quad H_n = \left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}, \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n+۱}\right)$

۳۵.۲ تعریف. زیر مجموعه‌ی E از فضای متری X را فشرده نامند هرگاه هر پوشش باز E، حاوی زیر پوششی متناهی باشد. یعنی به ازای هر پوشش باز E مانند $\{C_\alpha\}$، تعداد متناهی از C_α ها مانند $C_{\alpha_۱}$، $C_{\alpha_۲}$، ...، C_{α_n} باشد که

$$E \subseteq C_{\alpha_۱} \cup C_{\alpha_۲} \cup \cdots \cup C_{\alpha_n}$$

مثال.

- هر مجموعه‌ی متناهی فشرده است (چرا؟)

- $\mathbb{R}$ فشرده نیست زیرا پوشش بازی دارد که هیچ تعداد متناهی از اعضای آن قادر به پوشاندن $\mathbb{R}$ نیست مثلاً $\mathbb{R} = \bigcup_{۱}^{\infty}(-n, n)$.
- بازه $(۰, ۱)$ فشرده نیست زیرا $(۰, ۱) \subseteq \bigcup_{۱}^{\infty}(\frac{۱}{n+۱}, ۱)$ ولی هیچ تعداد متناهی از اعضای پوشش قادر به پوشاندن $(۰, ۱)$ نیست.

توجه. برای این که نشان دهیم مجموعه‌ای فشرده است باید پوشش دلخواهی برای آن در نظر بگیریم و تعدادی متناهی از اعضای آن را چنان پیدا کنیم که بتوانند آن مجموعه را بپوشانند.

برای این که ثابت کنیم مجموعه‌ای مانند E فشرده نیست باید پوشش بازی برای E پیدا کنیم که هیچ تعداد متناهی از اعضای این پوشش قادر به پوشاندن E نباشد.

$\mathbb{N}$ فشرده نیست مثلاً با فرض $I_n = (n - ۰/۵, n + ۰/۵)$، داریم $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{۱}^{\infty} I_n$. امّا هیچ تعداد متناهی از اعضای آن پوشش قادر به پوشاندن $\mathbb{N}$ نیست.

تمرین. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$،

۱) نشان دهید $A = \{۱, \frac{۱}{۲}, \ldots, \frac{۱}{n}, \ldots\}$ فشرده نیست.

۲) نشان دهید $A = \{۰, ۱, \frac{۱}{۲}, \ldots, \frac{۱}{n}, \ldots\}$ فشرده است.

۳) نشان دهید $\mathbb{Q}$ فشرده نیست.

در مثال ۳۱.۲ ملاحظه کردیم که یک مجموعه ممکن است در زیر فضا باز یا بسته باشد ولی در فضا دارای این خواص نباشد. در قضیه‌ی بعدی نشان خواهیم داد که اگر مجموعه‌ای در زیر فضا فشرده باشد در خود فضا نیز فشرده است و بالعکس.

۳۶.۲ قضیه. فرض کنیم $K \subseteq Y \subseteq X$. در این صورت K نسبت به X فشرده است اگر و فقط اگر K نسبت به Y فشرده باشد.

برهان. فرض کنیم K نسبت به X فشرده باشد و فرض کنیم $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز دلخواه K در Y باشد (یعنی $K \subseteq \bigcup V_\alpha$ و V_α ها در Y بازند) بنا بر قضیه ۳۰.۲ به ازای هر α، C_α بازی از X هست که $V_\alpha = C_\alpha \cap Y$ پس $K \subseteq \bigcup_\alpha C_\alpha$، چون K در X فشرده است در نتیجه تعداد متناهی در آنها مثلاً $C_{\alpha_۱}$، $C_{\alpha_۲}$، ...، C_{α_n} هست که $K \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} C_{\alpha_i}$ و چون $K \subseteq Y$ پس

$$K \subseteq Y \cap (\bigcup_{۱}^{n} C_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=۱}^{n}(Y \cap C_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=۱}^{n} V_{\alpha_i}$$

بالعکس، فرض کنیم K در فضای Y فشرده باشد و $\{C_\alpha\}$ پوشش باز دلخواهی برای K از زیر مجموعه‌های X باشد قرار می‌دهیم $V_\alpha = Y \cap C_\alpha$، بنا بر قضیه ۳۰.۲، V_α در Y باز است و

$$\left.\begin{matrix} K \subseteq \bigcup C_\alpha \\ K \subseteq Y \end{matrix}\right\} \Longrightarrow K \subseteq Y \cap (\bigcup_\alpha C_\alpha) = \bigcup_\alpha (Y \cap C_\alpha) = \bigcup_\alpha V_\alpha$$

پس $\{V_\alpha\}_\alpha$ پوشش باز K در Y است چون K در فضای Y فشرده است پس تعداد متناهی اندیس مانند α_1، α_2، ... و α_n هست که

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i}$$

مثال. فرض کنید $E = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3})$، آیا E در زیر فضای $\mathbb{Q}$ فشرده است؟
E در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ بسته نیست $(E' = [\sqrt{2}, \sqrt{3}])$ پس E در $\mathbb{R}$ فشرده نیست بنا بر این E در$\mathbb{Q}$ نیز فشرده نیست.

خواص دیگری از مجموعه‌های فشرده در قضیه‌های زیر بیان شده است.

۳۷.۲ قضیه. در هر فضای متری هر مجموعه‌ی فشرده بسته است.

برهان. فرض کنیم K زیر مجموعه‌ای فشرده در فضای متری X باشد نشان می‌دهیم K^c باز است.

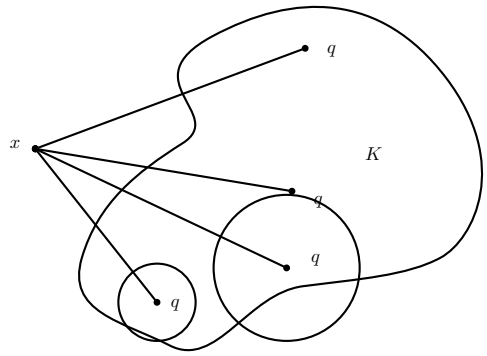
فرض کنیم x نقطه‌ی دلخواهی از K^c باشد پس $x \notin K$، بنا بر این به ازای هر q از K، $d(x,q) > 0$ قرار می‌دهیم $r_q = \frac{1}{2} d(x,q)$، می‌توان نوشت $K \subseteq \bigcup_{q \in K} N_{r_q}(q)$، چون K فشرده است پس تعداد متناهی ازآن همسایگی‌ها K را می‌پوشاند یعنی می‌توان نوشت

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_{r_i}(q_i)$$

حال اگر $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$، آنگاه

$$(1 \leq i \leq n) \qquad N_r(x) \cap N_{r_i}(q_i) = \varnothing$$

پس $N_r(x) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} N_{r_i}(q_i)) = \varnothing$ در نتیجه $N_r(x) \cap K = \varnothing$ یا $N_r(x) \subseteq K^c$ یعنی x نقطه‌ی درونی K^c است.



مثال.

- بازه‌ی $(۰, ۱)$ بسته نیست پس فشرده نیست.
- بازه‌ی $(۰, \infty)$ بسته نیست پس فشرده نیست.
- مجموعه‌های زیر چون بسته نیستند پس فشرده نیستند.
$A = \{\frac{۱}{n} | \, n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{\frac{n}{n+۱} | \, n \in \mathbb{N}\}$
در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$:

$$C = \{(x, y) | \, y = [x]\}, \quad D = \{(x, y) | \, y = \sin \frac{۱}{x}, x \neq ۰\}$$

۳۸.۲ **قضیه.** در هر فضای متری هر زیر مجموعه‌ی فشرده کراندار است.

برهان. فرض کنیم K زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای در فضای متری X باشد. چون $K \subseteq \bigcup_{x \in K} N_۱(x)$ بنا بر فشردگی K نتیجه می‌شود که تعداد متناهی همسایگی مانند $N_۱(x_۱)، N_۱(x_۲)، \ldots، N_۱(x_n)$ هست که

$$K \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} N_۱(x_i)$$

حال با انتخاب

$$h = \max_{۲ \leq i \leq n} d(x_۱, x_i) + ۱$$

خواهیم داشت

$$K \subseteq N_h(x_1)$$

تمرین.

۱) در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، دلیل فشرده نبودن مجموعه‌های زیر را بیان کنید.

(آ) $\mathbb{R}$ (ب) $\mathbb{N}$
(پ) $\mathbb{Q}$ (ت) $(0, \infty)$
(ث) $[0, \infty)$

۲) در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^2$، دلیل فشرده نبودن زیر مجموعه‌های زیر را بیان کنید.

(آ) $A = \{(x, y) |\ y = \sin x\}$

(ب) $B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} |\ n, m \in \mathbb{N}\}$

(پ) $C = \{(x, y) |\ y = \frac{1}{x}\}$

(ت) $\mathbb{R}^2$

(ث) $\mathbb{Q}^2$

۳۹.۲ **قضیه.** هر زیر مجموعه‌ی بسته یک مجموعه‌ی فشرده، فشرده است. (لازم نیست خود فضا فشرده باشد اگر مجموعه‌ای فشرده باشد تمام زیر مجموعه‌های بسته آن فشرده است.)

برهان. فرض کنیم K مجموعه‌ای فشرده در فضای متری X باشد و F زیر مجموعه‌ی بسته‌ای از K را در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم F فشرده است.

فرض کنیم $\{F_\alpha\}$ پوشش باز و دلخواه F باشد با الحاق F^c به $\{F_\alpha\}$، پوششی برای K به دست می‌آوریم

$$F \subseteq K \subseteq X = F \cup F^c \subseteq (\bigcup_\alpha F_\alpha) \cup F^c$$

چون K فشرده است پس تعدادی متناهی از این پوشش جدید موجود هست که K را می‌پوشاند. ممکن است F^c جزو آن تعداد متناهی نباشد در هر صورت می‌توان نوشت

$$K \subseteq F_{\alpha_1} \cup F_{\alpha_2} \cup \cdots \cup F_{\alpha_n} \cup F^c$$

چون $F \subseteq K$، پس آن تعداد متناهی F را نیز می‌پوشاند، امّا F^c در پوشاندن F هیچ نقشی ندارد یعنی

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$$

نتیجه. هر گاه F بسته و K فشرده باشد آنگاه $F \cap K$ فشرده است.

برهان. چون K فشرده است پس بسته است در نتیجه اشتراک دو مجموعه بسته، بسته است یعنی $K \cap F$ بسته است و چون $K \cap F \subseteq K$ بنا بر قضیه‌ی قبل $K \cap F$ فشرده است.

۴۰.۲ قضیه. فرض کنید $\{K_\alpha\}$ مجموعه‌ای از مجموعه‌های فشرده‌ی فضای متری X باشد به طوری که اشتراک هر تعداد متناهی از آنها ناتهی است، در این صورت $\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \varnothing$

برهان. (خلف) فرض کنید $\bigcap_\alpha K_\alpha = \varnothing$، با متمم گیری نتیجه می‌شود $\bigcup_\alpha K_\alpha^c = X$. چون K_α ها فشرده‌اند، پس بسته‌اند در نتیجه K_α^c ها بازند. یکی از K_α ها مثلاً K_{α_0} را در نظر می‌گیریم. چون

$$K_{\alpha_0} \subseteq X = \bigcup_{\alpha} K_\alpha^c$$

پس پوشش بازی برای K_{α_0} پیدا کردیم، چون K_{α_0} فشرده است. پس تعدادی متناهی از اعضای آن پوشش قادر به پوشاندن K_{α_0} است. یعنی می‌توان نوشت

$$K_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}\right)^c \Longrightarrow K_{\alpha_0} \cap \left(\bigcap_{1}^{n} K_{\alpha_i}\right) = \varnothing$$

واین خلاف فرض است.

نتیجه. هرگاه $\{K_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده و ناتهی باشد به طوری که $(n \in \mathbb{N})\, K_{n+1} \subseteq K_n$ در این صورت $\bigcap_1^n K_n \neq \varnothing$.

برهان. کافی است نشان دهیم اشتراک هر تعداد متناهی از K_n ها ناتهی است. فرض کنیم K_{n_1}، K_{n_2}، ...، K_{n_l}، تعدادی متناهی از K_n ها باشد.

$$K_{n_1} \cap K_{n_2} \cap \cdots \cap K_{n_l} = K_m \neq \varnothing\,, (m = \max_{1 \leq i \leq l} n_i)$$

مثال. فرض کنید $I_n = (0, \frac{1}{n})$، دنباله‌ی $\{I_n\}_1^\infty$ در شرط $I_{n+1} \subseteq I_n$ صدق می‌کند ولی $\bigcap_1^\infty (0, \frac{1}{n}) = \varnothing$. ملاحظه می‌کنیم که I_n ها فشرده نیستند.

فشردگی در قضیه قبل شرط لازم است ولی کافی نیست زیرا مثلاً با این که به ازای هر n، $(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}) \neq \varnothing$ فشرده نیست ولی $\bigcap_{1}^{\infty}(-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$.

در قضیه‌ی زیر خاصیت مهم دیگری از مجموعه‌های فشرده بیان شده است. چون عکس قضیه نیز برقرار است (ثابت خواهیم کرد) اهمیت قضیه را دو چندان می‌کند یعنی اولین معادل فشردگی را این قضیه و عکس آن فراهم می‌کند:

۴۱.۲ **قضیه.** هرگاه E زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای در فضای متری X باشد. آنگاه هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی E حداقل یک نقطه‌ی حدّی در E دارد.

برهان. (خلف) فرض کنید زیر مجموعه‌ای نامتناهی مانند A موجود باشد به طوری که $A \subseteq E$ و $A' \cap E = \varnothing$. پس

$$\forall x \quad \big(x \in E \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow \exists r_x \ \big(N^*_{r_x}(x) \cap A = \varnothing\big)\big)$$

پس به ازای هر $x \in E$، یک همسایگی مانند $N_{r_x}(x)$ موجود است به طوری که $N_{r_x}(x) \cap A$ حداکثر شامل خود x است.

آن همسایگی‌ها پوشش بازی برای E هستند چون E فشرده است پس باید تعدادی متناهی ازآنها E را بپوشاند در نتیجه می‌توان نوشت

$$A \subseteq E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_{r_i}(x_i)$$

پس $A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} N_{r_i}(x_i)) = A$. امّا اشتراک A با هر کدام حداکثر یک نقطه است یعنی A متناهی است پس فرض خلف باطل است.

مثال ۱. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$،

(آ) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ نامتناهی است و $\mathbb{N}' = \varnothing$، پس $\mathbb{R}$ فشرده نیست.

(ب) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}$ نامتناهی است و $\mathbb{N}' = \varnothing$، پس $\mathbb{N}$ فشرده نیست.

(پ) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ و $\mathbb{N}$ نامتناهی است و $\mathbb{N}' = \varnothing$، پس $\mathbb{Q}$ فشرده نیست.

(ت) بازه‌ی $(0, 1)$ فشرده نیست زیرا $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ نامتناهی است و $A' = \varnothing$.

مثال ۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد و d را متر مجزا در نظر بگیرید. هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی مانند A در این فضا فشرده نیست زیرا $A \subseteq A$ و $A' = \varnothing$. پس در فضای متری مجزا فقط زیرمجموعه‌های متناهی فشرده هستند. البته، زیرمجموعه‌های متناهی در فضای متری فشرده هستند.

تمرین. با استفاده از تعریف فشردگی، نشان دهید در فضای متری مجزا، مجموعه‌های نامتناهی فشرده نیستند.

مجموعه‌های نامتناهی در فضای متری مجزا بسته و کراندار هستند ولی فشرده نیستند.

اینک به خواص مجموعه‌های فشرده در $\mathbb{R}$ (به طور کلی در $\mathbb{R}^k$) می‌پردازیم.

ابتدا حجره‌ی k بعدی را تعریف می‌کنیم.

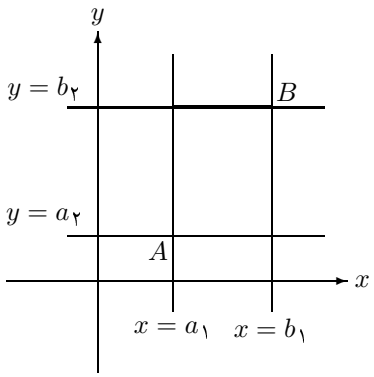
۴۲.۲ تعریف. به ازای هر دو نقطه مانند $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ و $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ از $\mathbb{R}^k$، با شرط $a_i < b_i \; (1 \le i \le k)$، بازه‌ی بسته‌ی k بعدی یا حجره‌ی k بعدی را با علامت $[A, B]$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$[A, B] = \{(x_1, \ldots, x_k) : a_i \le x_i \le b_i \,,\ 1 \le i \le k\}$$

و یا

$$[A, B] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k]$$

به عبارت دیگر هر بازه‌ی k بعدی حاصلضرب k تا بازه‌ی بسته‌ی یک بعدی است. بازه‌ی دو بعدی (در $\mathbb{R}^2$) مستطیل است که دو رأس مقابل A و B است و بازه‌ی سه بعدی مکعب مستطیلی است که A و B دو انتهای قطر است.



حال به بیان خاصیتی در بازه‌ی بازه‌های بسته می‌پردازیم. ابتدا در $\mathbb{R}$ و سپس در $\mathbb{R}^k$.

۴۳.۲ قضیه. فرض کنیم $\{I_n\}$ دنباله‌ای از حجره‌های بسته در $\mathbb{R}$ باشد به طوری که $I_{n+1} \subseteq I_n$، در این صورت

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$$

برهان. با فرض $I_n = [a_n, b_n]$ و $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ و $K = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ چون $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ پس به ازای هر n، $b_{n+1} \leq b_n$، $a_n \leq a_{n+1}$ پس a_n صعودی و b_n نزولی است، هرگاه m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند، آنگاه

$$a_n \leq a_{n+m} \leq b_{n+m} \leq b_m$$

پس هر b_m کران بالای E و هر a_n کران پائین K است. پس سوپرموم E و اینفیموم K هر دو موجود است با فرض $\alpha = \sup E$ و $\beta = \inf K$ چون به ازای هر m،

$$\forall n\ a_n \leq b_m \Rightarrow \alpha \leq b_m \Rightarrow \alpha \in I_m \Rightarrow \alpha \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_m$$

یعنی $\bigcap_1^\infty I_m \neq \varnothing$. همچنین می‌توان نوشت

$$\forall m\ a_n \leq b_m \Rightarrow a_n \leq \beta \Rightarrow \beta \in I_n \Rightarrow \beta \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$$

پس اگر $\alpha \neq \beta$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^\infty I_n = [\alpha, \beta]$.

قطر یک مجموعه‌ی ناتهی

۴۴.۲ **تعریف.** قطر زیرمجموعه‌ی ناتهی A از فضای متری (X, d) را با علامت $\mathrm{diam}A$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{diam}A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

هرگاه $\mathrm{diam}A < \infty$، گوییم قطر A متناهی است.

تمرین.

۱) فرض کنید E مجموعه‌ای کراندار در فضای متری (X, d) باشد (طبق تعریف ۱۸.۲.ت) نشان دهید قطر E متناهی است.

۲) نشان دهید $\mathrm{diam}E = \mathrm{diam}\bar{E}$

۴۵.۲ **تعریف.** فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد، d را کراندار گوییم هرگاه عددی مانند $k > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\forall\, x, y(d(x, y) \leq k)$$

به عبارت دیگر $\mathrm{diam}X \leq k$. در این صورت فضای متری (X, d) را کراندار گویند.

مثال.

۱) $\mathbb{R}$ با متر قدر مطلق کراندار نیست. امّا با متر $d(x,y)=\frac{|x-y|}{۱+|x-y|}$ کراندار است.

۲) فضای متری مجزا، یک فضای متری کراندار است.

۴۶.۲ قضیه. فرض کنیم $\{I_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای از حجره‌های k بعدی باشد $k\in\mathbb{N}$، به طوری که $I_{n+۱}\subseteq I_n$، دراین صورت $\bigcap_۱^\infty I_n\neq\varnothing$.

برهان. فرض کنیم $I_n=I_{۱_n}\times I_{۲_n}\times I_{۳_n}\times\cdots\times I_{k_n}$ که در آن I_{r_n} $(۱\leq r\leq n)$ حجره‌ی یک بعدی است. رابطه‌ی $I_{n+۱}\subseteq I_n$ نتیجه می‌دهد

$$\forall\, r\ : I_{r_{n+۱}}\subseteq I_{r_n}$$

پس بنا بر قضیه‌ی ۴۳.۲، x_rی هست که $x_r\in\bigcap_{n=۱}^\infty I_{r_n}$، در نتیجه

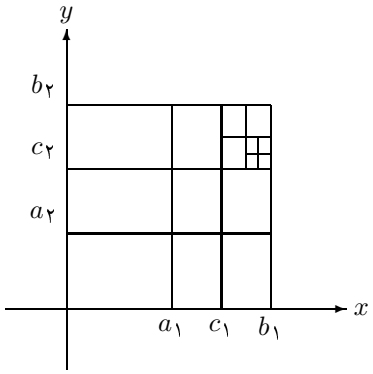
$$(x_۱,x_۲,\ldots,x_k)\in\bigcap_{n=۱}^{\infty}I_{r_n}$$

۴۷.۲ قضیه. هر حجره‌ی k بعدی فشرده است.

برهان (خلف). فرض کنیم حجره‌ی k بعدی مانند I باشد که فشرده نباشد، قرار دهید

$$I=[a_۱,b_۱]\times[a_۲,b_۲]\times\cdots\times[a_k,b_k]$$

فرض کنید $|I|=\sqrt{\sum_۱^k(b_k-a_k)^۲}$ $(\mathrm{diam}I=|I|)$. چون I فشرده نیست پس پوشش بازی مانند $\{G_\alpha\}_\alpha$ دارد که هیچ تعداد متناهی از G_α قادر به پوشاندن I نیست. با انتخاب $c_i=\frac{a_i+b_i}{۲}$ هر کدام از بازه‌های تشکیل دهنده‌ی I به دو قسمت $[a_i,c_i]$ و $[c_i,b_i]$ تقسیم می‌شوند. بدین ترتیب ۲^k حجره‌ی k بعدی به دست می‌آوریم که اجتماع آنها I است، و حداقل یکی از این ۲^k موجود است که توسط هیچ تعداد متناهی از G_αها پوشانده نمی‌شوند (در غیر این صورت، یعنی اگر هر کدام توسط تعداد متناهی پوشانده شود I هم توسط تعداد متناهی پوشانده می‌شود) آن را $I_۱$ می‌نامیم. به طریق مشابه $I_۱$ را نیز می‌توان به صورت اجتماع ۲^k حجره‌ی k بعدی نوشت که حداقل یکی از آن ها را نمی‌توان توسط هیچ تعداد متناهی از G_αها پوشاند. آن را $I_۲$ می‌نامیم. با ادامه‌ی این عمل (استقراء) دنباله‌ی $\{I_n\}_۱^\infty$ از حجره‌های k بعدی را به دست می‌آوریم که دارای خواص زیر است



(آ) $\cdots \subseteq I_{n+1} \subseteq I_n \subseteq \cdots \subseteq I_1 \subseteq I$

(ب) هیچ تعداد متناهی از G_αها قادر به پوشاندن I_n نیست.

(پ) به ازای هر n، $|I_n| = \frac{|I|}{2^n}$.

بنا بر (آ) و قضیه‌ی ۴۶.۲، $\bigcap_1^\infty I_n$ ناتهی است. فرض کنیم $p \in \bigcap_1^\infty I_n$ پس α_0 ای هست که $p \in G_{\alpha_0}$، چون G_{α_0} باز است r ای هست که $N_r(p) \subseteq G_{\alpha_0}$، حال n را چنان بزرگ اختیار می‌کنیم که $\frac{|I|}{2^n} < r$، در این صورت $I_n \subseteq G_{\alpha_0}$ و این خلاف (ب) است.

در مثال زیر روش دیگری (مستقیم از تعریف) برای فشرده بودن بازه بسته در $\mathbb{R}$ ارائه می‌شود.

۴۸.۲ مثال. نشان می‌دهیم بازه‌ی $I = [0, 1]$ فشرده است. فرض کنیم $\{G_\alpha\}$ پوشش باز دلخواهی برای I باشد. α_0ی هست که $0 \in C_{\alpha_0}$، چون G_{α_0} باز است. پس r ای هست که $(-r, r) \subseteq G_{\alpha_0}$ یا $[0, r) \subseteq G_{\alpha_0}$. حال فرض کنیم A مجموعه‌ی x هایی از I باشد که $[0, x]$ توسط تعداد متناهی از G_αها پوشانده می‌شود

$$A = \left\{ x \mid \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n : [0, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} \right\}$$

واضح است که $A \neq \varnothing$، زیرا مثلاً $\frac{r}{2} \in A$، و $A \subseteq I$ پس A کراندار است در نتیجه سوپرموم A موجود است. فرض کنیم $p = \sup A$ نشان می‌دهیم $p = 1$؛اگر $p \neq 1$، چون $p \in I$ پس α_1ای هست که $p \in G_{\alpha_1}$ بنا بر باز بودن G_{α_1}، rی هست که $(p - r, p + r) \subseteq G_{\alpha_1}$، و یا $(p - \frac{r}{2}, p + \frac{r}{2}) \subseteq G_{\alpha_1}$، چون $A \subseteq [0, p - \frac{r}{2}]$ پس توسط

تعداد متناهی از C_α ها پوشانده می‌شود. با افزودن G_{α_1} به این تعداد متناهی، $[0, p+\frac{r}{2}]$ نیز توسط تعداد متناهی G_α هاپوشانده می‌شود. این خلاف سوپرموم بودن p است پس $p = 1$. معمولاً اثبات فشردگی یک مجموعه با استفاده از تعریف آسان نیست. در قضیه‌ی زیر معادل بودن (آ) و(ب) را قضیه‌ی هاینه‌بُرل گویند.

۴۹.۲ قضیه. فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{R}^k$ در این صورت سه گزاره‌ی زیر معادلند.

(آ) E بسته و کراندار است.

(ب) E فشرده است.

(پ) هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی E حداقل یک نقطه‌ی حدّی در E دارد.

برهان (ب)⇒(آ): چون E کراندار است پس حجره‌ی k بعدی، مانند I هست که $E \subseteq I$، چون I فشرده و E بسته است پس E فشرده است (قضیه‌ی ۳۹.۲)

برهان (پ)⇒(ب): این قسمت طی قضیه‌ی ۴۱.۲ اثبات شده است.

برهان (آ)⇒(پ): ابتدا نشان می‌دهیم E کراندار است، اگر E کراندار نباشد (خلف) یعنی

$$\forall n \, \exists x \, (x \in E \,\&\, |x| > n)$$

پس به ازای هرn، $(n = 1, 2, 3, \ldots)$، x_nی از E هست که $|x_n| > n$، بدین ترتیب زیرمجموعه‌ی نامتناهی $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ ازE به دست می‌آوریم که حتی در$\mathbb{R}^k$ نقطه‌ی حدّی ندارد و این خلاف فرض است.

حال نشان می‌دهیم E بسته است. فرض کنیم p نقطه‌ی حدی دلخواهی از E باشد. بنابر تعریف نقطه‌ی حدّی به ازای هر n، مجموعه‌ی $N^*_{\frac{1}{n}}(p) \cap E$ ناتهی است، انتخاب می‌کنیم

$$x_n \in N^*_{\frac{1}{n}}(p) \cap E$$

واضح است که A نامتناهی است وp تنها نقطه‌ی حدّی A است پس $p \in E$.

در قضیه‌ی ۴۹.۲ معادلی برای فشردگی یعنی (آ) و(پ) معرفی شد. توجّه کنید که (آ) و (ب) در هر فضای متری معادل نیستند. مثلاً مجموعه‌ی اعداد گویا با متر قدر

مطلق را در نظر بگیرید.دیدیم که زیرمجموعه‌ی $E = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{۲}, \sqrt{۳})$ در این فضا بسته و کراندار است امّا فشرده نیست. همچنین در فضای $\mathbb{R}$ با متر مجزا مجموعه‌ی $[۰, ۱]$ بسته و کراندار است امّا فشرده نیست.

در هر فضای متری (ب) و (پ) معادل هستند. در قسمتهای بعدی این مطلب ثابت خواهد شد.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی قبل، قضیه‌ی زیر را که به قضیه‌ی وایرشتراس معروف است اثبات می‌کنیم.

نتیجه. هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی و کراندار $\mathbb{R}^k$ یک نقطه‌ی حدّی در $\mathbb{R}^k$ دارد.

برهان. فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{R}^k$ و نامتناهی و کراندار باشد چون کراندار است پس حجره‌ی k بعدی مانند I هست که $E \subseteq I$، در نتیجه بنا بر قسمت (پ) قضیه‌ی ۴۹.۲، حداقل یک نقطه‌ی حدّی در I دارد.

۵۰.۲ قضیه. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_\alpha$ مجموعه‌ی همه‌ی همسایگی‌های $\mathbb{R}^k$ باشد که مختصات مرکز و شعاع آن ها گویا باشد. S مجموعه‌ی باز دلخواهی در $\mathbb{R}^k$ باشد. در این صورت به ازای هر x از S، αی هست که $x \in G_\alpha \subseteq S$.

برهان. فرض کنیم S مجموعه‌ی بازی در $\mathbb{R}^k$ و $x \in S$، $x = (x_۱, \ldots, x_n)$، چون S باز است پس r ای هست که $N_r(x) \subseteq S$. حال عدد گویای y_i را چنین انتخاب می‌کنیم $|x_i - y_i| < \frac{r}{۴\sqrt{k}}$ $(۱ \le i \le k)$ و نیز عدد گویای q را چنین می‌گیریم $\frac{r}{۴} < q < \frac{r}{۲}$ در این صورت

$$|y - x| = \sqrt{\sum_{۱}^{k} (x_i - y_i)^۲} \le \frac{r}{۴}$$

پس $x \in N_{\frac{r}{۴}}(y) \subseteq N_q(y)$ و نیز داریم

$$N_q(y) \subseteq N_r(x) \subseteq S$$

پس عضوی از $\{G_\alpha\}$ که جزو S و شامل x باشد پیدا کردیم.

۵۱.۲ قضیه. (قضیه‌ی پوشش لیندلف) فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}^k$، در این صورت هر پوشش باز E شامل زیرپوشش حداکثر شمارش پذیر می‌باشد.

برهان. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای در $\mathbb{R}^k$ باشد و$\{G_\alpha\}$ پوشش باز دلخواهی برای E در نظر بگیرید. زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارش پذیر از $\{G_\alpha\}$ پیدا می‌کنیم که E را می‌پوشاند.

فرض کنیم $C = \{A_۱, A_۲, \ldots, A_n, \ldots\}$ مجموعه‌ی همه‌ی همسایگی ها در $\mathbb{R}^k$ باشد که مرکز و شعاع آن ها گویا باشد به کمک G زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارش پذیر از $\{G_\alpha\}$ پیدا می‌کنیم که E را بپوشاند.

فرض کنیم $x \in E$ و دلخواه باشد پس $\alpha_\circ$ی هست که $x \in G_{\alpha_\circ}$ بنا به قضیه‌ی قبل (۵۰.۲) kی هست که $x \in A_k \subseteq G_{\alpha_\circ}$، A_k هایی از این نوع بسیارند ولی آن را که اندیس آن از همه کمتر است انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم m_x کوچکترین اندیس باشد به طوری که $x \in A_{m_x} \subseteq S$ پس می‌توان نوشت

$$E \subseteq \bigcup_{x \in E} A_{m_x}$$

بدین طریق زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارش پذیر از C پیدا کردیم که E را می‌پوشاند. برای به دست آوردن زیرمجموعه‌ی حداکثر شمارش پذیر از $\{G_\alpha\}_\alpha$، به ازای هر مجموعه‌ی مانند A_{k_x} یکی از G_α ها که در شرط $A_{k_x} \subseteq G_\alpha$ صدق کند انتخاب می‌کنیم. پس تعداد حداکثر شمارش پذیر از G_α یافتیم که E را پوشاند.

نتیجه. هرگاه $E \subseteq \mathbb{R}^k$، و فشرده نباشد، آنگاه پوشش بازی دارد که زیر پوشش شمارش پذیر دارد امّا هیچ زیرپوشش متناهی ندارد. به عبارت دیگر پوششی مانند $\{G_\alpha\}_\alpha$ دارد که $E \subseteq \bigcup_{i=۱}^{\infty} G_{\alpha_i}$ ولی

$$\forall n \; (E \not\subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} G_{\alpha_i})$$

مجموعه‌های کامل

۵۲.۲ **تعریف.** E را کامل گویند هر گاه بسته باشد و هر نقطه‌اش نقطه‌ی حدی باشد یعنی $E = E'$

مثال.

۱) هر بازه‌ی بسته‌ی کراندار یا بی کران در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، کامل است.

۲) مجموعه‌ی تهی در هر فضای متری کامل است.

۳) در فضای متری مجزا به جز تهی مجموعه ی کامل نداریم زیرا در این فضا نقطه‌ی حدّی نداریم.

۴) $\mathbb{Q}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، کامل نیست زیرا $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}'$.

تمرین. کدام یک از مجموعه‌های زیر در فضای اقلیدسی کامل است؟

$$A = \{(x,y) : y = \cos x\}, B = \{(x,y) : y = x \sin \frac{۱}{x}, x \neq ۰\}$$

$$C = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}\}$$

چون مجموعه‌های کامل نقطه‌ی حدّی دارند پس نمی‌توانند متناهی باشند، پس هر مجموعه‌ی کامل یک مجموعه‌ی نامتناهی است. معمولاً سئوالات زیر مطرح است.

۱) آیا مجموعه‌های کامل در $\mathbb{R}$، به صورت یک بازه‌ی بسته است؟ یا از چندین بازه‌ی بسته تشکیل شده است؟ به عبارت دیگر آیا در $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی کاملی وجود دارد که بازه نیست یا هیچ بازه‌ای در آن قرار ندارد.

۲) آیادر $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی کاملی وجود دارد که عدد گویا در آن موجود نباشد؟ در قضیه‌ی زیر ثابت شده که کامل‌های ناتهی در $\mathbb{R}^k$ شمارش ناپذیرند.

مجموعه‌های کامل در $\mathbb{R}^k$

۵۳.۲ **قضیه.** هر مجموعه‌ی کامل ناتهی در $\mathbb{R}^k$ شمارش ناپذیر است.

برهان. فرض کنیم B مجموعه‌ی کاملی در $\mathbb{R}^k$ باشد چون B نقطه‌ی حدّی دارد پس نامتناهی است. فرض کنیم (خلف) B شمارش پذیر باشد، $B = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots\}$. برای رسیدن به تناقض دنباله‌ای از همسایگی ها به صورت زیر می‌سازیم.

فرض کنیم $N_۱$ یکی از همسایگی های $x_۱$ باشد، چون $N_۱ \cap B$ نامتناهی است (هر نقطه‌ی B نقطه حدّی B است) نقطه‌ای از این اشتراک به جز $x_۲$(ممکن است $x_۲$ در آن نباشد) می‌گیریم و یک همسایگی برای آن نقطه مانند $N_۲$ چنان انتخاب می‌کنیم که (آ) $\bar{N}_۲ \subseteq N_۱$ (ب) $x_۱ \notin \bar{N}_۲$. فرض کنیم N_k ساخته شده باشد چون $N_k \cap B$ نامتناهی است همسایگی $N_{k+۱}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_k \notin \bar{N}_{k+۱}$ و $\bar{N}_{k+۱} \subseteq N_k$، پس دنباله‌ای از همسایگی ها به استقراء پیدا شد.

حال فرض کنیم $A_k = \bar{N}_k \cap B$، چون $\bar{N}_k$ بسته و کراندار است پس فشرده است ، و در نتیجه A_n دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده‌ی ناتهی است که در شرط $A_{k+۱} \subseteq A_k$ صدق می‌کند بنا بر این $\bigcap_{k=۱}^{\infty} A_k \neq \varnothing$ امّا هیچ کدام از نقاط B در این

اشتراک نیست زیرا

$$x_۱ \notin A_۲,\ x_۲ \notin A_۳,\ \ldots,\ x_{k-۱} \notin A_k, \ldots$$

پس $\bigcap_۱^\infty A_k = \varnothing$ و این یک تناقض است ($\bigcap_۱^\infty A_k \subseteq B$).

نتیجه. هر بازه مانند $[a,b]$، $(a<b)$ چون کامل است پس شمارش ناپذیر است. مجموعه‌ی اعداد حقیقی نیز کامل است پس شمارش ناپذیر است.

آیا مجموعه‌ی کاملی وجود دارد که شامل هیچ بازه‌ای نباشد؟

مجموعه‌ی کانتور پاسخ سئوال فوق است.

۵۴.۲ مجموعه کانتور.

فرض کنیم $E_۰ = [۰,۱]$، بازه‌ی باز $(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$ را از $E_۰$ حذف کرده و بقیه را $E_۱$ می‌نامیم، یعنی $E_۱ = [۰, \frac{۱}{۳}] \cup [\frac{۲}{۳}, ۱]$، یک سوّم میانی بازه‌های $E_۱$ را حذف کرده و اجتماع چهار بازه‌ی بسته‌ی باقی مانده را $E_۲$ می‌نامیم. با ادامه‌ی این عمل دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده‌ی E_n را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
E_۰ &= [۰,۱]\\
E_۱ &= [۰,\tfrac{۱}{۳}] \cup [\tfrac{۲}{۳},۱]\\
E_۲ &= [۰,\tfrac{۱}{۹}] \cup [\tfrac{۲}{۹},\tfrac{۳}{۹}] \cup [\tfrac{۶}{۹},\tfrac{۷}{۹}] \cup [\tfrac{۸}{۹},۱]\\
E_۳ &= [۰,\tfrac{۱}{۲۷}] \cup [\tfrac{۲}{۲۷},\tfrac{۳}{۲۷}] \cup \cdots \cup [\tfrac{۲۶}{۲۷},۱]\\
&\vdots\\
E_n &= [۰,\tfrac{۱}{۳^n}] \cup \cdots \cup [\tfrac{۳^n-۱}{۳^n},۱]\\
&\vdots
\end{aligned}$$

که دارای خواص زیر است:

(آ) به ازای هر n، $E_{n+۱} \subseteq E_n$.

(ب) به ازای هر n، E_n بسته و کراندار است پس فشرده است.

(پ) به ازای هر n، E_n از ۲^n بازه بسته تشکیل شده است. طول هر بازه E_n برابر $\frac{۱}{۳^n}$ است. پس طول E_n برابر $(\frac{۲}{۳})^n$ است.

مجموعه‌ی $P = \bigcap_۱^\infty E_n$ را مجموعه‌ی کانتور گویند.

بنابر قضیه‌ی ۴۳.۲، p ناتهی است. همچنین P بسته و کراندار است پس فشرده است. ملاحظه می‌کنیم که $۰ \in P$، $۱ \in P$، $\frac{۱}{۳} \in P$، به طور کلی ابتدا و

انتهای هر بازه تشکیل دهنده‌ی E_n، عضو P است. در ساختن E_nها بازه‌های باز به صورت $\left(\frac{۳k+۱}{۳^m}, \frac{۳k+۲}{۳^m}\right)$ که در آن m و k اعداد طبیعی هستند و $۳k+۲ \leq ۳^m$، حذف شده‌اند پس چنین بازه‌ای با P نقطه‌ی مشترکی ندارد و علاوه بر آن هر عدد به صورت $\frac{۳k+۱}{۳^m}$ و $\frac{۳k+۲}{۳^m}$ عضو P است. چون هر بازه مانند (α, β) شامل بازه‌ای به صورت فوق است (زیرا با انتخاب m به طوری که $\frac{۱}{۳^m} < \frac{\beta-\alpha}{۶}$، (α, β) شامل چنان بازه‌ای می‌شود) بنابراین (α, β) نمی‌تواند زیرمجموعه‌ی P باشد. یعنی P شامل هیچ بازه‌ای نیست.

به طریق زیر نیز می‌توان نشان داد که P شامل هیچ بازه‌ای نیست. فرض کنید بازه‌ای مانند (α, β) باشد که $(\alpha, \beta) \subseteq P$. n را چنان اختیار می‌کنیم که $(\frac{۲}{۳})^n < \frac{\beta-\alpha}{۲}$، در این صورت چون $(\alpha, \beta) \subseteq E_n$ پس باید $\beta - \alpha < (\frac{۲}{۳})^n < \frac{\beta-\alpha}{۲}$ و این امکان ندارد.

حال نشان می‌دهیم P کامل است. چون P بسته است پس کافی است نشان دهیم $P \subseteq P'$. فرض کنیم $x \in P$ و $N_r(x)$ یک همسایگی دلخواهی از x باشد. n را چنان بزرگ اختیار می‌کنیم که $\frac{۱}{۳^n} < r$، چون $x \in E_n$، پس x عضو یکی از بازه‌های E_n است. فرض کنید $I = [a, b]$ آن بازه از E_n باشد که $x \in I$، چون $\frac{۱}{۳^n} < r$، پس $I \subseteq N_r(x)$ در نتیجه $a, b \in N_r(x) \cap P$ یعنی $N_r^*(x) \cap P \neq \varnothing$.

تمرین.

۱) نشان دهید که $\frac{۱}{۴} \in P$، ($\frac{۱}{۴}$ ابتدا و انتهای هیچ کدام از بازه‌های E_n نیست)

۲) توضیح دهید که چرا P شمارش ناپذیر است.

*۳) مجموعه‌ی کانتور، مجموعه‌ای شمارش ناپذیری که از اندازه‌ی صفر است.

مجموعه‌های همبند

۵۵.۲ **تعریف.** دو زیر مجموعه‌ی A و B در فضای متری X را از هم جدا شده گوییم هرگاه

$$\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \varnothing$$

مثال. $A = (۰, ۱)$ و $B = (۱, ۲)$

با اینکه $E = (۰, ۱]$ و $K = (۱, ۲)$ از هم جدایند ولی از هم جدا شده نیستند.

$A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۵\}$ از هم جدا شده اند.

مجموعه‌ی E را ناهمبند گویند هرگاه E را بتوان به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی از هم جدا شده‌ی ناتهی نوشت. به عبارت دیگر هرگاه A و Bای باشد که

$$E = A \cup B\,, A \neq \varnothing\,, B \neq \varnothing\,, \bar{A} \cap B = \varnothing\,, A \cap \bar{B} = \varnothing$$

گویند E ناهمبند است، در این صورت مجموعه‌ی $\{A, B\}$ را یک جداسازی یا یک ناهمبندی برای E گویند.

مجموعه‌ی $E = \{۱, ۲, ۳\}$ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، ناهمبند است زیرا $A = \{۱\}$ و $B = \{۲, ۳\}$ یک جداسازی برای E است. همچنین مجموعه‌های $C = \{۱, ۲\}$ و $D = \{۳\}$ نیز یک جداسازی برای E است.

تمرین.

۱) نشان دهید مجموعه‌ی اعداد گنگ در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ ناهمبند است.

۲) نشان دهید بازه‌ی $(۰, ۱)$ در فضای گسسته‌ی $\mathbb{R}$ ناهمبند است.

۳) کدام یک از مجموعه‌های زیر در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ ناهمبند است؟

$$A = \{(x, y) : x \geq ۰, y \geq ۰\}$$
$$B = \{(x, y) : y = [x]\}\,, C = \{(x, y) : y = \tfrac{۱}{x}\}$$

۴) نشان دهید مجموعه‌ی کانتور در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، ناهمبند است.

مثال. در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ ناهمبند است زیرا می‌توان نوشت

$$\mathbb{Q} = \{q : q \in \mathbb{Q}\ \&\ q < \sqrt{۲}\} \cup \{q | q \in \mathbb{Q}\ \&\ q > \sqrt{۲}\}$$

ملاحظه می‌کنیم هر عدد گنگ می‌تواند یک جداسازی برای $\mathbb{Q}$ ایجاد کند.

۵۶.۲ **تعریف.** زیرمجموعه‌ی E را در فضای متری X همبند گویند، هرگاه ناهمبند نباشد.

مثال.

۱) مجموعه‌های یکانی و $\varnothing$ در هر فضای متری همبند هستند.

۲) در قضیه‌ی ۵۷.۲ ثابت می‌کنیم که بازه‌ها در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ همبند هستند.

۳) در فضای متری مجزا هر زیرمجموعه‌ای که بیش از یک عضو داشته باشد ناهمبند است.

در قضیه‌ی زیرین ثابت می‌کنیم در فضای متری $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی تنها مجموعه‌های همبند بازه‌ها و مجموعه‌های یکانی و $\varnothing$ و خود $\mathbb{R}$ است.

۵۷.۲ قضیه. فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{R}$، در این صورت شرط لازم و کافی برای آنکه E همبند باشد آنست که به ازای هر x و y و z اگر $x \in E$ و $y \in E$ و z بین x و y باشد، آنگاه $z \in E$.

برهان لزوم. فرض کنیم E همبند باشد (خلف)، امّا حکم برقرار نباشد یعنی x ای و y ای و z ای باشد که x و y از E باشند و $x < z < y$ ولی $z \notin E$، در این صورت فرض کنید

$$A = E \cap (-\infty, z) \quad \text{و} \quad B = E \cap (z, +\infty)$$

چون $x \in A$ پس $A \neq \varnothing$ و چون $y \in B$ پس $B \neq \varnothing$ و نیز $E = A \cup B$، همچنین داریم

$$\bar{A} \cap B \subseteq \overline{(-\infty, z)} \cap (z, +\infty) = (-\infty, z] \cap (z, +\infty) = \varnothing$$

$$A \cap \bar{B} \subseteq (-\infty, z) \cap \overline{(z, +\infty)} = (-\infty, z) \cap [z, +\infty) = \varnothing$$

پس توانستیم E را به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی از هم جدا شده‌ی ناتهی بنویسیم و این خلاف همبند بودن E است. پس فرض خلف باطل است.

برهان کفایت. (خلف) اگر E همبند نباشد پس A و B ای هست که

$$E = A \cup B\,, A \neq \varnothing\,, B \neq \varnothing\,, \bar{A} \cap B = \varnothing\,, A \cap \bar{B} = \varnothing$$

xی از A و yی از B انتخاب می‌کنیم و فرض کنیم $x < y$. قرار می‌دهیم $A_1 = A \cap [x, y]$، چون $A_1 \neq \varnothing$ و کراندار است فرض کنیم $z = \sup A_1$ پس $z \in \bar{A_1} \subseteq \bar{A}$ و در نتیجه $z \notin B$، $x < z < y$.

دو حالت در نظر می‌گیریم.

(آ) اگر $z \notin A$ آنگاه $z \notin E$، پس عددی بین دو عضو E است ولی متعلّق به E نیست و این خلاف فرض است.

(ب) اگر $z \in A$ آنگاه $z \notin \bar{B}$ پس r ای هست که $(z - r, z + r) \cap B = \varnothing$. حال فرض کنید $z_1 \in (z, y) \cap (z, z + r)$، چون $z_1 \notin A$ و $z_1 \notin \bar{B}$ پس $z_1 \notin E$ و این خلاف فرض است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (اگر $z_1 \in A$، آنگاه $z_1 \in A_1$، پس باید $z \leq z_1$، امّا $z < z_1$)

۵۸.۲ چند تمرین

۱) در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$، معین کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر صفات فشردگی، همبندی و کامل بودن را دارند.

$A = \{(x,y)|y = \sin\frac{۱}{x}, x \neq ۰\}$
$B = \{(x,y)|y = [x], ۰ \leq x \leq ۳\}$
$C = \{(x,y)|y = \sin\frac{۱}{x}, x \neq ۰\} \cup \{(۰,۰)\}$
$D = \{(x,y)|y = x\sin\frac{۱}{x}, x \neq ۰\} \cup \{(۰,۰)\}$
$E = Q \times Q$
$F = \{(\frac{۱}{n}, \frac{۱}{m})|n,m \in \mathbb{N}\}$

نقاط حدّی مجموعه‌های فوق را به دست آورید.

۲) فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی باز و از هم جدا در فضای متری (X,d) باشند. ثابت کنید A و B از هم جدا شده هستند.

۳) حکم تمرین ۱ را در مورد مجموعه‌های بسته و از هم جدا ثابت کنید.

۴) فرض کنید E زیرمجموعه‌ی ناهمبندی از فضای متری (X,d) باشد و $\{A,B\}$ یک جداسازی برای E در نظر بگیرید. در این صورت

(آ) A و B در زیرفضای E، باز هستند

(ب) A و B در زیرفضای E، بسته هستند.

(پ) A و B ممکن است در X نه باز باشند و نه بسته باشند.

به عنوان نتیجه‌ای از تمرینهای فوق می‌توان گفت

فضای متری X ناهمبند است اگر و تنها اگر X به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی باز و از هم جدا باشد.

فضای متری X ناهمبند است اگر و تنها اگر X به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی بسته و از هم جدا باشد.

۵) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که فضای متری (X,d) ناهمبند باشد آن است که دارای زیرمجموعه‌ی محض ناتهی مانند A باشد که A هم باز باشد و هم بسته باشد.

٦) نشان دهید هر فضای متری همبند که حداقل دو عضو داشته باشد شمارش ناپذیر است

۷) آیا درون مجموعه‌های همبند همبند است؟(به $\mathbb{R}^2$ توجّه کنید)

۸) فرض کنید E مجموعه‌ای همبند باشد و $p \in \bar{E}$، نشان دهید $E \cup \{p\}$ همبند است به طور کلی ثابت کنید.

۹) اگر E همبند باشد و $E \subseteq A \subseteq \bar{E}$، آنگاه A همبند است. (در نتیجه $\bar{E}$ همبند است، یعنی بست هر همبند همبند است)

۱۰) نشان دهید اجتماع دو مجموعه‌ی همبند که اشتراک آن ها ناتهی باشد، همبند است.

۱۱) نشان دهید اجتماع هر گردایه از مجموعه‌های همبند که اشتراک آن ها ناتهی باشد، همبند است.

مؤلفه‌های یک فضای متری

۵۹.۲ **تعریف.** زیر مجموعه‌ی A از فضای متری X را همبند ماکسیمال گوییم در صورتی که همبند باشد و زیرمجموعه‌ی هیچ مجموعه‌ی همبند نباشد.

مثال.

۱) در فضای متری $X = (0,1) \cup [2,5]$ با متر اقلیدسی، هر دو زیرمجموعه‌ی $(0,1)$ و $[2,5]$ همبند ماکسیمال هستند.

۲) در فضای متری $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی فقط مجموعه‌های یکانی همبند ماکسیمال هستند.

٦۰.۲ **تعریف.** زیرمجموعه‌ی A را یک مؤلفه‌ی فضای متری X گوییم در صورتی که همبند ماکسیمال باشند.

٦۱.۲ **مثال.**

۱) اگر X همبند باشد تنها مؤلفه اش خود X است.

۲) در فضای متری مجزا مجموعه‌های یکانی تنها مؤلفه‌های فضا می‌باشد.

۶۲.۲ قضیه. مؤلفه‌های یک فضای متری همواره بسته اند

برهان. فرض کنید A مؤلفه‌ای از فضای متری X باشد امّا بسته نباشد. پس $A \neq \bar{A}$، چون بست هر مجموعه‌ی همبند، همبند است پس $\bar{A}$ مجموعه‌ی همبندی است که A زیرمجموعه‌ی محض آن است و این خلاف ماکسیمال بودن A است. مؤلفه‌های یک فضای متری لزوماً باز نیستند زیرا مثلاً مجموعه‌های یکانی در زیرفضای $\mathbb{Q}$ مؤلفه‌های $\mathbb{Q}$ هستند امّا در $\mathbb{Q}$ باز نیستند.

۶۳.۲ قضیه. هر دو مؤلفه‌ی یک فضای متری یا بر هم منطبق است و یا از هم جدا هستند.

برهان. فرض کنید A و B دو مؤلفه‌ی فضای متری X باشد نشان می‌دهیم $A = B$ یا $A \cap B = \varnothing$. اگر $A \cap B \neq \varnothing$ آنگاه حکم تمام است. پس فرض کنید $A \cap B = \varnothing$ در این صورت $A \cup B$ همبند است. چون $A \subseteq A \cup B$ و A ماکسیمال است پس $A \cup B = A$ و چون $B \subseteq A \cup B$ و B ماکسیمال است پس $A \cup B = B$، در نتیجه $A = B$.

۶۴.۲ قضیه. هر زیرمجموعه‌ی همبند یک فضای متری فقط زیرمجموعه‌ی یکی از مؤلفه‌های آن است

برهان. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی همبندی از X باشد. $\{A_\alpha\}_\alpha$ را مجموعه‌ی کلیه‌ی زیرمجموعه‌های همبند X فرض کنید که شامل A هستند. واضح است که $A \in \{A_\alpha\}$.قرار دهید $B = \bigcup_\alpha A_\alpha$. در این صورت B همبند است زیرا همه‌ی A_α ها همبند هستند و $\bigcap_\alpha A_\alpha = A$. حال نشان می‌دهیم B ماکسیمال است. فرض کنیم M مجموعه‌ی همبند و دلخواهی باشد که $B \subseteq M$، پس $A \subseteq M$ در نتیجه $M \in \{A_\alpha\}$ بنا براین $M \subseteq B$. پس ثابت شد $B = M$. یعنی B ماکسیمال است.

۶۵.۲ چند نتیجه

نتیجه ۱. هر نقطه از یک فضای متری دقیقاً عضو یک مؤلفه است.

برهان. چون یکانی‌ها همبند هستند پس حکم از قضیه‌ی قبل نتیجه می‌شود.

نتیجه ۲. یک زیرمجموعه‌ی ناتهی و همبند از X، یک مؤلفه‌ی X است اگر هم باز و هم بسته باشد.

برهان. فرض کنید A زیرمجموعه‌ی ناتهی و همبندی از X باشد که هم باز و هم بسته باشد. بنا بر قضیه‌ی قبل A زیرمجموعه‌ی یک مؤلفه‌ی X مانند B است.

نشان می‌دهیم $A = B$. هرگاه $A \neq B$، آنگاه A زیرمجموعه‌ی محض B خواهد شد. می‌دانیم تنها زیرمجموعه‌ای از یک مجموعه‌ی همبند که هم باز و هم بسته باشد مجموعه‌ی تهی است پس $A = \varnothing$، و این یک تناقض است.

٦٦.٢ **تعریف.**

(آ) فرض کنید x نقطه‌ای از فضای متری (X, d) و A زیرمجموعه‌ای از آن باشد، فاصله‌ی x از A را با علامت $d(x, A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

(ب) به ازای هر دو زیرمجموعه‌ی A و B، فاصله‌ی A و B را با علامت $d(A, B)$ نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

مثال.

۱) فرض کنید $A = (۰, ۱)$، در این صورت $d(۰, A) = ۰$

۲) فرض کنید $A = \{\frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\}$، $B = \{-\frac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ در این صورت $d(A, B) = ۰$.

۳) هرگاه $A \cap B \neq \varnothing$، آنگاه $d(A, B) = ۰$.

تمرین. $\mathbb{R}$ را با متریک $d(x, y) = \frac{|x-y|}{۱+|x-y|}$ در نظر بگیرید. فاصله‌ی نقطه‌ی ۰ را از بازه‌ی $(۲, ۳)$ بیابید.

مرز یک مجموعه

٦٧.٢ **تعریف.** فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از فضای متری X باشد. نقطه‌ی a از X را یک نقطه‌ی مرزی E نامیم، در صورتی که هر همسایگی a، هم E و هم E^c را قطع کند. یعنی

$$\forall r\,(N_r(a) \cap E \neq \varnothing \;\&\; N_r(a) \cap E^c \neq \varnothing)$$

مجموعه‌ی همه‌ی نقاط مرزی را با علامت ∂E نشان می‌دهیم. نقاط مرزی را نقاط کرانه‌ای نیز گویند. بنا بر این مطابق تعریف فوق، $\partial E = \bar{E} \cap \bar{E^c}$، در نتیجه ∂E همواره بسته است.

مثال.
۱) در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$،

$$\partial\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$
$$E = (۰, ۱) \Rightarrow \partial E = \{۰, ۱\}$$
$$A = \{\tfrac{۱}{n} | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \partial A = A \cup \{۰\}$$

۲) فرض کنید X فضای متری مجزا باشد، به ازای هر $E \subseteq X$،

$$\partial E = \bar{E} \cap \bar{E^c} = E \cap E^c = \varnothing$$

یعنی در فضای متری مجزا نقطه‌ی مرزی نداریم.

۶۸.۲ تعریف. فضای متری X را جدایی پذیر خوانیم هرگاه شامل زیرمجموعه‌ی چگال و حداکثر شمارش پذیری باشد. مثلاً $\mathbb{R}$ جدایی پذیر است زیرا $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه‌ی چگال و شمارش پذیری از $\mathbb{R}$ است.

$\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی جدایی پذیر است زیرا $\mathbb{Q}$ شمارش پذیر است و در $\mathbb{Q}$ چگال است و نیز مجموعه‌ی اعداد گویا به صورت $\frac{k}{۲^n}$ که در آن k صحیح و n طبیعی است در $\mathbb{Q}$ چگال است (چرا؟)

تمرین. $\mathbb{R}^k$ جدایی پذیر است زیرا $\mathbb{Q}^k$ شمارش پذیر و در $\mathbb{R}^k$ چگال است.

۶۹.۲ تعریف. مجموعه‌ی $\{V_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌های باز فضای متری X را پایه‌ای برای آن فضا گویند هر گاه به ازای هر x از X و هر مجموعه‌ی باز شامل x مانند G، αی باشد که $x \in V_\alpha \subseteq G$، به عبارت دیگر هر مجموعه‌ی باز در X اجتماع تعدادی از V_α ها باشد.

مثال. مجموعه‌ی همسایگی های یک فضای متری پایه‌ای برای آن فضا است.

۷۰.۲ تمرین.

۱) ثابت کنید مجموعه‌ی تمام بازه‌های باز که مرکز آن ها گویا و شعاع آن ها نیز گویا باشد پایه‌ای شمارش پذیر برای $\mathbb{R}$ است.

۲) در ادامه‌ی تمرین قبل ثابت کنید هر فضای متری جدایی پذیر، پایه‌ای حداکثر شمارش‌پذیر دارد (راهنمایی: آن همسایگی ها را در نظر بگیرید که مرکز آن ها از مجموعه‌ی چگال و شعاع آن ها گویا باشد)

۳) ثابت کنید هر فضای متری فشرده مانند X جدایی پذیر است. راهنمایی: به ازای هر عدد طبیعی مانند n تعداد متناهی همسایگی به شعاع $\frac{۱}{n}$ موجود است

که X را می‌پوشاند. مجموعه‌ای مانند E متشکل از مراکز آن همسایگی ها، در X چگال است پس X جدایی پذیر است. مجموعه‌ی کلیه‌ی آن همسایگی ها پایه‌ای برای X می‌باشند. همچنین بنا بر تمرین قبل، X پایه‌ای حداکثر شمارش پذیر دارد(قضیه‌ی ۷۱.۲ برهان دیگری برای این تمرین ارائه می‌کند.)

در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$، برای مفهوم فشردگی، در قضیه‌ی ۴۹.۲، دو معادل معرفی کردیم که یکی از آن ها، بسته و کراندار می‌باشد. دیدیم که در سایر فضاهای متری فشردگی معادل بسته و کرانداری نیست. در این بخش هدف معرفی معادلی برای مفهوم فشردگی است که در کلیه‌ی فضاهای متری دارای اعتبار باشد. این مطلب با اثبات عکس قضیه‌ی ۴۱.۲ امکان پذیر خواهد شد. ابتدا یک قضیه‌ی کمکی را می آوریم و سپس به اثبات آن مطلب می‌پردازیم.

۷۱.۲ **قضیه.** فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد که در آن هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی حداقل یک نقطه‌ی حدّی دارد. ثابت کنید X جدایی پذیر است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم به ازای هر $\delta > ۰$، تعدادی متناهی همسایگی به شعاع δ موجود است که X را می‌پوشاند. فرض کنید $x_۱ \in X$، اگر $X \subseteq N_\delta(x_۱)$، حکم تمام است، در غیر این صورت $x_۲$ ای از X هست که $x_۲ \notin N_\delta(x_۱)$. حال اگر $X \subseteq N_\delta(x_۱) \cup N_\delta(x_۲)$، حکم تمام است، در غیر آن صورت $x_۳$ را انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید $x_۱$، $x_۲$،...، x_n انتخاب شده باشند اگر $X \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} N_\delta(x_i)$، حکم تمام است در غیر آن صورت $x_{n+۱}$ ای از X موجود است به طوری که $x_{n+۱} \notin \bigcup_{i=۱}^{n} N_\delta(x_i)$، هرگاه این عمل پس از تعدادی متناهی مرحله متوقف نشود زیرمجموعه‌ی نامتناهی $E = \{x_۱, \ldots, x_n, \ldots\}$ از X پیدا می‌شود که در X نقطه‌ی حدّی نخواهد داشت. پس «به ازای هر $\delta > ۰$، تعدادی متناهی همسایگی به شعاع δ موجود است که X را می‌پوشاند.»

حال اگر $\delta = \frac{۱}{n}$ $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ اختیار کنید تعدادی متناهی همسایگی هست که شعاع آن‌ها $\frac{۱}{n}$ است و X را می‌پوشاند. مجموعه‌ی E متشکل از مراکز آن همسایگی ها حداکثر شمارپذیر است. نشان می‌دهیم درX چگال است $(X = \bar{E})$.

فرض کنید $p \in X$ و $r > ۰$ دلخواه باشد n راچنین اختیار می‌کنیم $\frac{۱}{n} < r$، چون

$$\exists\, x_۱, \ldots, x_m : \; X \subseteq \bigcup_{i=۱}^{m} N_{\frac{۱}{n}}(x_i)$$

پس x_i ای هست که $p \in N_{\frac{۱}{n}}(x_i)$، در نتیجه

$$x_i \in N_{\frac{۱}{n}}(P) \cap E \subseteq N_r(p) \cap E$$

تمرین.

۱) نشان دهید قضیه‌ی پوششی لیندلف در هر فضای جدایی پذیر برقرار است یعنی نشان دهید اگر X جدایی پذیر باشد، هر پوشش باز $E(E \subseteq X)$ شامل زیرپوششی حداکثر شمارش پذیر است (راهنمایی: مانند قضیه‌ی پوششی لیندلف عمل کنید)

۲) فرض کنید X جدایی پذیر باشد و $E \subseteq X$ فشرده نباشد، نشان دهید پوشش بازی مانند $\{G_\alpha\}_\alpha$ دارد به طوری که شامل زیرپوشش شمارش‌پذیر مانند $\{G_{\alpha_i}\}_1^\infty$ می‌باشد ولی

$$\forall n(E \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i})$$

حال به اثبات عکس قضیه‌ی ۴۱.۲ می‌پردازیم.

۷۲.۲ قضیه. هرگاه X فضای متری باشد که در آن هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی حداقل یک نقطه‌ی حدّی داشته باشد، آنگاه X فشرده است.

برهان. بنا بر قضیه‌ی ۷۱.۲، X جدایی پذیر است، فرض کنید X فشرده نباشد. بنا بر تمرین ۲ از بخش ۷۱.۲، X پوشش بازی مانند $\{G_\alpha\}$ دارد که شامل زیرپوشش شمارش پذیر مانند $\{G_{\alpha_i}\}_i^\infty$ هست ولی به ازای هر n،

$$X \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

حال به ازای هر عدد طبیعی مانند n، x_n از X را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ مجموعه‌ی $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ زیرمجموعه‌ای نامتناهی از X است. نشان می‌دهیم A نقطه‌ی حدّی ندارد. فرض کنید $p \in X$، پس i ای هست که $p \in G_{\alpha_i}$، چون G_{α_i} باز است،

$$\exists\, r : N_r(p) \subseteq G_{\alpha_i}$$

امّا انتخاب اعضای A چنان است که حداکثر نقاط x_1، x_2، ...، x_{i-1} در G_{α_i} قرار دارند پس $N_r(p) \cap A$ متناهی است، در نتیجه p نقطه‌ی حدّی A نیست. یعنی A نقطه‌ی حدّی ندارد و این خلاف فرض قضیه است پس X فشرده است.

قضیه‌ی ۴۱.۲ توأم با قضیه‌ی ۷۲.۲ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X, d) باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که E فشرده باشد آن است که هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی E حداقل یک نقطه‌ی حدّی در E داشته باشد.

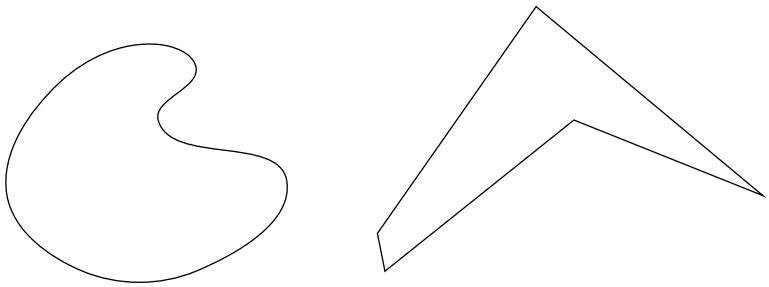
در فصل دنباله‌ها معادلی برای فشردگی بیان خواهد شد که با مفهوم فوق در ارتباط است.

مجموعه‌های محدّب

۷۳.۲ **تعریف.** مجموعه‌ی $E \subseteq \mathbb{R}^k$ را محدّب خوانیم هرگاه به ازای هر x و y از E و هر λ که $۰ \leq \lambda \leq ۱$،

$$\lambda x + (۱ - \lambda)y \in E$$

توجّه کنید به طور هندسی در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$، مکان $\lambda x + (۱ - \lambda)y$ پاره خطّی است که نقاط x و y را به هم دیگر وصل می‌کند. پس می‌توان گفت در $\mathbb{R}^۲$ و در $\mathbb{R}^۳$ مجموعه‌ای محدّب است که هر دو نقطه‌ی آن را توسط پاره خطّی به یکدیگر وصل کنیم، تمام پاره خط در مجموعه قرار گیرد. پس هر مثلثی محدّب است یا دایره و مستطیل محدّب هستند ولی مجموعه‌هایی مانند شکل زیر محدّب نیستند.



نشان می‌دهیم در $\mathbb{R}^k$، همسایگی ها محدّب هستند.

برهان. به ازای هر x و y از $N_r(a)$ و هر $۰ \leq \lambda \leq ۱$،

$$\begin{aligned} |\lambda x + (۱ - \lambda)y - a| &= |\lambda(x - a) + (۱ - \lambda)(y - a)| \\ &\leq \lambda\,|x - a| + (۱ - \lambda)|y - a| \\ &< \lambda\, r + (۱ - \lambda)r \\ &= r \end{aligned}$$

تمرین.

۱) نشان دهید حجره‌های k بعدی محدّب هستند.

۲) نشان دهید درون هر مجموعه‌ی محدّب، محدّب است.

۳) نشان دهید بست هر مجموعه‌ی محدّب، محدّب است.

۷۴.۲ تعریف. نقطه‌ی p در فضای متری X را یک نقطه‌ی تراکم مجموعه‌ی $E \subseteq X$ گویند هرگاه هر همسایگی p شامل تعداد شمارش ناپذیری از E باشد.

مثلاً، در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$ نقطه‌ی تراکم ندارد، هر نقطه از $\mathbb{R}$، یک نقطه‌ی تراکم است. مجموعه‌ی نقاط تراکم اعداد گنگ برابر $\mathbb{R}$ است. مجموعه‌ی نقاط تراکم بازه‌ی $(۰, ۱)$ برابر $[۰, ۱]$ است.

تمرین.

۱) فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}^k$، E شمارش ناپذیر، و F مجموعه‌ی نقاط تراکم E باشد. نشان دهید F کامل است و $F^c \cap E$ حداکثر شمارش پذیر است.

۲) آیا مجموعه‌ی کانتور نقطه‌ی تراکم دارد؟

۷۵.۲ تعریف. زیرمجموعه‌ی A از فضای متری X را در X هیچ جا چگال خوانیم در صورتی که متمم بست A برابر X باشد یعنی $X = (\bar{A})^c$ به عبارت دیگر، A در X هیچ جا چگال است اگر و تنها اگر $int(\bar{A}) = \varnothing$.

۷۶.۲ تمرین.

۱) نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی متناهی یک فضای متری در آن فضا هیچ جا چگال است.

۲) نشان دهید مجموعه‌ی کانتور در $[۰, ۱]$ هیچ جا چگال است.

۷۷.۲ تمرینهای گوناگون

۱) ثابت کنید E' بسته است.

۲) ثابت کنید $(A \cup B)' = A' \cup B'$

۳) آیا $(A \cap B)' = A' \cap B'$ ؟

۴) ثابت کنید $(\bar{E})' \subseteq E'$. آیا $(E')' = E'$؟

۵) A و B دو مجموعه در فضای متری X اند، ثابت کنید $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

۶) فرض کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌ها در فضای متری X باشد ثابت کنید

(آ)

$$\forall n : \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_i}$$

(ب) ثابت کنید $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ با یک مثال نشان دهید که طرف دوّم زیرمجموعه‌ی حقیقی طرف اوّل است.

۷ (آ) نشان دهید در $\mathbb{R}^k$ هر نقطه‌ی درونی یک نقطه‌ی حدّی است. به عبارت دیگر ثابت کنید هر نقطه از مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^k$ نقطه‌ی حدّی آن مجموعه است.

(ب) آیا در مورد مجموعه‌های بسته پاسخ صحیح است.

(پ) آیا در هر فضای متری هر نقطه‌ی درونی می‌تواند یک نقطه‌ی حدّی باشد.

۸) فرض کنیم X یک فضای متری و E° مجموعه‌ی نقاط درونی E باشد ثابت کنید

(آ) E° باز است.

(ب) E باز است اگر و فقط اگر $E = E^\circ$

(پ) به ازای هر مجموعه‌ی باز مانند F اگر $F \subseteq E$ آنگاه $F \subseteq E^\circ$ یعنی: E° بزرگترین مجموعه‌ی باز است که جزء E است.(به قضیه‌ی ۲۷.۲ توجّه کنید) پس می‌توان گفت $\bar{E}$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته‌ی شامل E است و E° بزرگترین زیرمجموعه‌ی باز E است.

(ت) ثابت کنید $(E^\circ)^c = \bar{E^c}$

(ث) آیا $E^\circ = \bar{E}^\circ$ ؟

(ج) آیا $\bar{E} = \bar{E}^\circ$ ؟

۹) مجموعه‌ی نامتناهی X را با متر مجزا در نظر بگیرید. ثابت کنید

(آ) در این فضا همه‌ی زیرمجموعه‌ها باز هستند.

(ب) در این فضا همه‌ی زیرمجموعه‌ها بسته هستند.

(پ) در این فضا زیرمجموعه‌هایی که بیش از یک عضو داشته باشند ناهمبند هستند.

(ت) در این فضا همه زیرمجموعه‌ها کراندار هستند.

(ث) در این فضا زیرمجموعه‌های نامتناهی فشرده نیستند (این قسمت را به دو طریق ثابت کنید: ۱) با استفاده از قضیه‌ی ۴۱.۲، ۲) پوشش بازی بیابید که زیرپوشش متناهی نداشته باشد).

(ج) با استفاده از قضیه‌ی ۴۱.۲ ثابت کنید در این فضا زیرمجموعه‌های متناهی فشرده هستند.

*(ح) در این فضا کدام دنباله‌ها همگرایند؟ در این فضا کدام دنباله‌ها در شرط کوشی صدق می‌کنند؟ آیا این فضا تامّ است؟

۱۰) مجموعه‌ی اعداد گویا یعنی $\mathbb{Q}$ را با متر اقلیدسی در نظر بگیرید و فرض کنید $E = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. پوشش بازی برای E بیابید که زیرپوشش متناهی نداشته باشد.

۱۱) فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از $(0, 1)$ باشد که بسط اعشاری آن ها فقط از ارقام ۳ یا ۵ تشکیل شده باشد. ثابت کنید

(آ) E شمارش ناپذیر است (در نتیجه $(0, 1)$ شمارش ناپذیر است)

(ب) E در $(0, 1)$ چگال نیست

(پ) E در $(\frac{1}{3}, \frac{5}{9})$ چگال نیست

(ت) E فشرده است

(ث) E کامل است

در تمرین زیرمجموعه‌ی کاملی از $\mathbb{R}$ معرفی می‌شود که در آن مجموعه عدد گویا موجود نیست.

*۱۲) فرض کنید K مجموعه‌ی کلیه‌ی کسرهای مسلسل باشد که با دو عدد ۴ و ۷ تشکیل شده باشند. نشان دهید K یک مجموعه‌ی کامل است که‌در آن عدد گویا موجود نیست.

۱۳) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های درون تهی در $\mathbb{R}^k$ باشند به طوری که A بسته هم باشد. نشان دهید درون $A \cup B$ تهی است.

۱۴) فرض کنید E زیرمجموعه‌ی چگال در فضای متری X باشد و B در X باز باشد. نشان دهید $B \subseteq \overline{B \cap A}$.

۱۵) ثابت کنید هر مجموعه‌ی بسته در $\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت اجتماع شمارش پذیر از مجموعه‌های باز نوشت. این حکم را به $\mathbb{R}^k$ توسیع دهید.

۱۶) فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^k$، و شمارش ناپذیر باشد نشان دهید S حداقل یک نقطه‌ی تراکم در خود دارد.

۱۷) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه‌ی فشرده $\mathbb{R}$ باشند و

$$K = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

نشان دهید K در $\mathbb{R}^2$ فشرده است.

۱۸) کدام یک از مجموعه‌های زیر در $\mathbb{R}$ فشرده است

$$A = \{x : x^2 \geq x\}$$

$$B = \{x : 0 \leq \sin x \leq 1\}$$

فصل ۳

دنباله‌ها و سری‌ها

دنباله‌ها

با مفهوم دنباله در درس ریاضیات عمومی آشنا شدیم. در این فصل خواصّ دنباله‌ها را در فضاهای متری مورد مطالعه قرار خواهیم داد. رفتار دنباله‌های حقیقی ما را در مطالعه‌ی رفتار دنباله‌ها در فضاهای متری راهنمایی خواهند کرد و بااندکی تغییر، در فضاهای متری قابل توصیف خواهند شد.

۱.۳ **تعریف.** هر تابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ را یک دنباله‌ی حقیقی گویند. به طور کلی، هر تابع از $\mathbb{N}$ به فضای متری (X,d) را یک دنباله در فضای متری X گوییم. در این تعریف به جای $\mathbb{N}$، می‌توان $\mathbb{N}\cup\{۰\}$ را در نظر گرفت.

دنباله‌ی f را با علامت $\{f(n)\}_{۱}^{\infty}$ نشان داده و به جای نماد مرسوم $f(n)$ از نماد f_n استفاده خواهیم کرد. گاهی با نوشتن جملات دنباله، می‌توان آن را نشان داد. مثلاً دنباله‌ی f با ضابطه‌ی $f_n=\frac{۱}{n}$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\dots$$

برای سادگی عبارت «دنباله‌ی f_n» را به جای «دنباله‌ی f با جملات f_n» به کار خواهیم برد.

۲.۳ **تعریف.** دنباله‌ی $\{P_n\}_{۱}^{\infty}$ از فضای متری (X,d) را همگرا خوانیم هرگاه نقطه‌ای مانند L از X باشد به طوری که

به ازای هر عدد مثبت مانند ε، عددی طبیعی مانند N موجود باشد که به ازای هر n، اگر $n\geq N$، آنگاه $d(P_n,L)<\varepsilon$.

در این صورت گوییم، P_n همگرا به L است و می‌نویسیم $\lim_{n\longrightarrow\infty} P_n = L$ یا به طور خلاصه، $P_n \to L$.

بنابر این،

$$\lim_{n\to\infty} P_n = L \iff \forall\,\varepsilon\ \exists N\ \forall\, n\,(n \geq N \Longrightarrow d(P_n, L) < \varepsilon) \qquad (۱)$$

چون $\{d(P_n, L)\}_{۱}^{\infty}$ یک دنباله‌ی حقیقی است رابطه‌ی (۱) نشان می‌دهد که

$$P_n \to L \iff d(P_n, L) \to ۰ \qquad (۲)$$

هرگاه دنباله‌ی P_n همگرا نباشد آن را واگرا خوانیم.

مثال. دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ در $\mathbb{R}$، همگرا به صفر است، در حالی که در فضای $X = (۰, ۱)$ با متر اقلیدسی، واگراست.
دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ در فضای متری $\mathbb{R}$ با متر مجزا واگراست(چرا؟)

بنا بر این، همگرایی یک دنباله به فضایی که در آن قرار دارد نیز بستگی دارد.

دنباله‌ی $a_n = n$ و $b_n = (-۱)^n$ هر دو در$\mathbb{R}$ واگرا هستند.

۳.۳ **تعریف.** دنباله‌ی $\{P_n\}_{۱}^{\infty}$ را کراندار خوانیم هرگاه برد آن کراندار باشد. به عبارت دیگر، دنباله‌ی P_n در فضای متری (X, d) کراندار است هرگاه یک همسایگی مانند V از X باشد که

$$\forall n\ (P_n \in V)$$

پس، دنباله‌ی حقیقی P_n کراندار است هرگاه

$$\exists M\ \forall n\,(|P_n| < M)$$

۴.۳ چند مثال

مثال ۱. دنباله‌ی حقیقی $b_n = \frac{n}{n+۱}$، همگرا و کراندار است.
مثال ۲. دنباله‌ی حقیقی $a_n = \sin n$، واگرا و کراندار است (چرا؟)

مثال ۳. دنباله‌ی حقیقی $c_n = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$، کراندار است زیرا

$$۰ < c_n < \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{n+۱} = \frac{n}{n+۱} < ۱$$

مثال ۴. نشان می‌دهیم $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی $a_n = \frac{i^n+۱}{n}$ همگرا به صفر است.

حکم: $\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n\ (n \geq N \Longrightarrow |\frac{i^n+۱}{n} - ۰| < \varepsilon)$

$\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. رابطه‌ی $|\frac{i^n+۱}{n} - ۰| \leq \frac{۲}{n} < \varepsilon$ در صورتی برقرار است که $n > \frac{۲}{\varepsilon}$، پس اگر N عدد صحیح بزرگتر از $\frac{۲}{\varepsilon}$ باشد (مثلاً $N = [\frac{۲}{\varepsilon}] + ۱$، جزء صحیح) آنگاه

$$\forall n\ (n \geq N \Rightarrow n > \frac{۲}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{i^n+۱}{n}| < \varepsilon)$$

مثال ۵. نشان می‌دهیم دنباله‌ی مختلط $S_n = i^n$ $(i^۲ = -۱)$ واگراست.

حل: فرض کنیم S_n همگرا به α باشد (فرض خلف) پس گزاره زیر درست است.

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n\ (n \geq N \Longrightarrow |S_n - \alpha| < \varepsilon)$$

با انتخاب $\varepsilon = ۱$، Nی هست که اگر $n \geq N$، آنگاه $|S_n - \alpha| < \varepsilon$. حال فرض کنید $n = ۴N$، در نتیجه

$$|S_{۴N} - \alpha| < ۱ \Longrightarrow |۱ - \alpha| < ۱$$

هر گاه فرض کنید $n = ۲N$، آنگاه

$$|S_{۲N} - \alpha| < ۱ \Longrightarrow |-۱ - \alpha| < ۱ \Longrightarrow |۱ + \alpha| < ۱$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$۲ = |۲| = |۲ - \alpha + \alpha| = |۱ - \alpha + ۱ + \alpha| \leq |۱ - \alpha| + |۱ + \alpha| < ۱ + ۱ = ۲$$

و این یک تناقض است.

به طریق دیگر نشان می‌دهیم دنباله‌ی فوق واگراست. فرض کنیم α عدد مختلط دلخواهی باشد نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} S_n \neq \alpha$.

حکم : $\exists \varepsilon\ \forall N\ \exists n\ (n \geq N\ \&|S_n - \alpha| \geq \varepsilon)$

دو حالت در نظر می‌گیریم

(آ) $\alpha = ۱$،

فرض کنید $\varepsilon = ۱$ و N دلخواه باشد و $n = ۲N$ در این صورت

$$|i^n - \alpha| = |i^n - ۱| = |-۱ - ۱| = ۲ > ۱$$

(ب) $\alpha \neq 1$،
با انتخاب $\varepsilon = \frac{|1-\alpha|}{2}$، فرض کنید N دلخواه باشد و $n = 4N$ خواهیم داشت
$$|i^n - \alpha| = |1 - \alpha| \geq \varepsilon$$

۵.۳ **قضیه.** فرض کنید $\{a_n\}_1^\infty$ و $\{b_n\}_1^\infty$ و $\{c_n\}_1^\infty$ دنباله‌های حقیقی باشند به طوری که

$$\exists N \, \forall n \, (n \geq N \Longrightarrow a_n \leq b_n \leq c_n) \qquad (۳)$$

در این صورت اگر $a_n \to P$ و $c_n \to P$، آنگاه $b_n \to P$.

برهان. $\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم چون $a_n \to P$ و $c_n \to P$، پس

$$\exists N' \, \forall n \, (n \geq N' \Longrightarrow P - \alpha < a_n < P + \varepsilon) \qquad (۴)$$

$$\exists N'' \, \forall n \, (n \geq N'' \Longrightarrow P - \alpha < c_n < P + \varepsilon) \qquad (۵)$$

حال اگر $N_1 = \max\{N, N', N''\}$، آنگاه از (۳)، (۴) و (۵) نتیجه می‌شود

$$\forall n \, (n \geq N_1 \Longrightarrow P - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < P + \varepsilon) \, .$$

۶.۳ **قضیه.** فرض کنیم $\{a_n\}_1^\infty$، دنباله‌ای از فضای متری X باشد.

(آ) اگر $a_n \to P$ و $a_n \to P'$، آنگاه $(P, P' \in X) \, P = P'$

(ب) اگر $a_n \to P$، آنگاه a_n کراندار است به عبارت دیگر هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

برهان.

(آ) هر گاه $P \neq P'$ (خلف)، آنگاه فرض کنید $\varepsilon = \frac{1}{2} d(P, P')$،
چون $a_n \to P$ پس N_1ی هست که به ازای هر n اگر $n \geq N_1$، آنگاه $d(a_n, P) < \varepsilon$. چون $a_n \to P'$ پس N_2ی هست که به ازای هر n اگر $n \geq N_2$، آنگاه $d(a_n, P') < \varepsilon$. حال اگر $n \geq \max\{N_1, N_2\}$، آنگاه

$$d(P, P') \leq d(P, a_n) + d(a_n, P') < 2\varepsilon = d(P, P')$$

و این امکان ندارد. پس فرض خلف باطل است.

(ب) چون $a_n \to P$ پس Nی هست که اگر $n \geq N$، آنگاه

$$d(a_n, P) < ۱$$

حال اگر $r = \max_{۱ \leq n < N} d(a_n, P) + ۱$ آنگاه به ازای هر n، $a_n \in N_r(P)$.

۷.۳ **قضیه**. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای از فضای متری (X, d) باشد در این صورت

(آ) $P \in \overline{E}$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای مانند x_n از E باشد که $\lim_{n\to\infty} x_n = P$.

(ب) اگر $P \in E'$، آنگاه دنباله‌ای مانند x_n از E هست که $\lim_{n\to\infty} x_n = P$.

(پ) $P \in E'$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای دو به دو متمایز مانند x_n از E باشد که $\lim_{n\to\infty} x_n = P$.

هرگاه $E \subseteq \mathbb{R}$، آنگاه

(ت) $P \in E'$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای اکیداً یکنوا مانند x_n از E باشد که $\lim_{n\to\infty} x_n = P$.

برهان (آ) (لزوم). فرض کنید $P \in \overline{E}$، پس

$$\forall r \; N_r(P) \cap E \neq \varnothing$$

به ازای هر عدد طبیعی مانند n، چون $N_{\frac{۱}{n}}(P) \cap E \neq \varnothing$، پس عضوی از این اشتراک گرفته a_n می‌نامیم. بدین ترتیب دنباله‌ی a_n از E انتخاب شد که،

$$\forall n \, (۰ \leq d(a_n, P) < \frac{۱}{n})$$

هرگاه $n \to \infty$، آنگاه $d(a_n, P) \to ۰$، یعنی $a_n \to P$.

(کفایت). فرض کنید دنباله‌ای مانند a_n از E باشد $\lim_{n\to\infty} a_n = P$، $r > ۰$ را دلخواه می‌گیریم، Nای هست که

$$\forall n \, (n \geq N \Longrightarrow d(a_n, P) < r \Longrightarrow a_n \in N_r(P))$$

پس به ازای هر $r > ۰$، $N_r(P) \cap E \neq \varnothing$، یعنی $P \in \overline{E}$.

برهان (ب). مانند برهان (آ) قسمت اوّل، a_n را می‌توان انتخاب کرد که $a_n \to P$.

برهان (پ) (لزوم). دنباله‌ی a_n از E به صورت زیر انتخاب می‌کنیم. چون $N_۱(P) \cap E$ نامتناهی است پس یک نقطه از آن انتخاب کرده $a_۱$ می‌نامیم. چون

$N_{\frac{1}{2}}(P) \cap E$ نامتناهی است پس نقطه‌ای از آن مانند a_2 با شرط $a_1 \neq a_2$ انتخاب می‌کنیم. به ازای هر عدد طبیعی n، چون $N_{\frac{1}{n}}(P) \cap E$ نامتناهی است نقطه‌ای ازآن مانند a_n را با شرط $a_n \neq a_i \; (1 \leq i < n)$ انتخاب می‌کنیم. بدین طریق دنباله‌ای دو به دو متمایز مانند a_n از E انتخاب شد که در شرط $0 \leq d(a_n, P) < \frac{1}{n}$، صدق می‌کند. حال اگر $n \to \infty$، آنگاه $d(a_n, P) \to 0$، پس $a_n \to P$.

(کفایت). فرض کنید دنباله‌ای دو به دو متمایز مانند x_n از E باشد که $x_n \to P$، پس به ازای هر r،

$$\exists N \; \forall n \; (n \geq N \Longrightarrow d(x_n, P) < r)$$

درنتیجه $N_r(P) \cap E$ نامتناهی است، یعنی $P \in E'$.

برهان (ت) را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

۸.۳ قضیه. با توجه به تعریف ۱۱.۲ و قضیه‌ی ۲۷.۲ و قضیه‌ی ۷.۳ می‌توان نوشت

$$P \in \overline{E} \Longleftrightarrow P \in E \; \vee \; P \in E'$$
$$P \in \overline{E} \Longleftrightarrow \forall r \; N_r(P) \cap E \neq \varnothing$$
$$P \in \overline{E} \Longleftrightarrow \exists x_n \; (x_n \in E \; \& \; x_n \to P)$$
$$P \in \overline{E} \Longleftrightarrow P \in \bigcap \{F : \; E \subseteq F \; \& \; F' \subseteq F\}$$

۹.۳ قضیه. فرض کنید $\{a_n\}_1^\infty$ و $\{b_n\}_1^\infty$ دنباله‌های مختلطی باشند به طوری که

$$a_n \to a \;\; , \;\; b_n \to b$$

در این صورت

(آ) $a_n + b_n \to a + b$

(ب) به ازای هر عدد ثابت مانند c، $ca_n \to ca$.

(پ) $a_n b_n \to ab$

(ت) اگر $a \neq 0$ و $a_n \neq 0$، آنگاه $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$.

برهان (آ). $\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم
N_1ای هست که اگر $n \geq N_1$، آنگاه $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$،
N_2ای هست که اگر $n \geq N_2$، آنگاه $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$
حال با انتخاب $N = \max\{N_1, N_2\}$، به ازای هر n اگر $n \geq N_2$، آنگاه

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

برهان (ب). اگر $c = 0$ حکم برقرار است. فرض کنیم $c \neq 0$، چون $a_n \to a$، پس Nای هست که اگر $n \geq N$ آنگاه $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ حال اگر $n \geq N$ آنگاه

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

برهان (پ). ابتدا در حالت $a = 0$ و $b = 0$ قضیه را ثابت می‌کنیم

$$\text{حکم} : \forall\varepsilon\,\exists N\,\forall n\,(n \geq N \Longrightarrow |a_n b_n| < \varepsilon)$$

$\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم
چون $a_n \to a$ پس N_1ای هست که اگر $n \geq N_1$، آنگاه $|a_n| < \sqrt{\varepsilon}$
چون $b_n \to b$ پس N_2ای هست که اگر $n \geq N_2$، آنگاه $|b_n| < \sqrt{\varepsilon}$
حال اگر $N = \max\{N_1, N_2\}$، آنگاه به ازای هر n اگر $n \geq N$، آنگاه

$$|a_n b_n| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$$

حال به اثبات قضیه در حالت کلی می‌پردازیم. با استفاده از اتّحاد

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)$$

حکم نتیجه می‌شود، زیرا حدّ جمله‌ی اوّل بنا به قضیه‌ی حدّی حاصل ضرب در حالت خاص صفر است. حد جملات بعد بنا به (ب) صفر است، در نتیجه حکم بنا به قضیه‌ی حد مجموع برقرار است.

(ت) چون $a_n \to a$ پس N_1ای هست که اگر $n \geq N_1$، آنگاه

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$$

و یا

$$-\frac{1}{2}|a| < |a_n| - |a| < \frac{1}{2}|a|$$

و یا

$$\frac{۱}{۲}|a| < |a_n| < \frac{۳}{۲}|a|$$

$\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم. چون $a_n \to a$ پس $N_۲$ی هست که اگر $n \geq N_۲$ آنگاه $|a_n - a| < \frac{۱}{۲}|a|^۲\,\varepsilon$. حال اگر $N = \max\{N_۱, N_۲\}$ آنگاه به ازای هر $n \geq N$،

$$\left|\frac{۱}{a_n} - \frac{۱}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n|.|a|} < \frac{\frac{۱}{۲}|a|^۲\,\varepsilon}{\frac{۱}{۲}|a|^۲} = \varepsilon$$

دنباله‌ها در $\mathbb{R}^k$

$a_n = (\frac{۱}{n}, \sin n, e^{-n})$ یک دنباله در $\mathbb{R}^۳$ است. $b_n = (\frac{\ln n}{n}, \frac{n+۱}{n})$ یک دنباله در $\mathbb{R}^۲$ است.

به طور کلی هر دنباله در $\mathbb{R}^k$ به صورت $a_n = (a_{۱n}, a_{۲n}, \cdots, a_{kn})$ است که در آن a_{in}ها $(۱ \leq i \leq k)$ دنباله های حقیقی هستند و به مؤلفه‌های a_n معروف هستند. لازم به یادآوری است که به ازای هر دو نقطه مانند $A = (a_۱, \ldots, a_k)$ و $B = (b_۱, \ldots, b_k)$

$$d(A,B) = |A - B| = \sqrt{\sum_{۱}^{k}(b_r - a_r)^۲} \quad \text{(متر اقلیدسی)}$$

۱۰.۳ قضیه. فرض کنیم $a_n \in \mathbb{R}^k$، یعنی $\{a_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}^k$ باشد، پس $a_n = (a_{۱n}, \ldots, a_{kn})$ در این صورت

(آ) شرط لازم و کافی برای آن که a_n همگرا به نقطه‌ای مانند $a = (a_۱, a_۲, \ldots, a_k)$ باشد آن است که به ازای هر i، $(۱ \leq i \leq k)$، $a_{in} \to a_i$.

(ب) فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در $\mathbb{R}^k$ باشند و β_n دنباله‌ی حقیقی باشد به طوری که

$$x_n \to x, \quad y_n \to y, \quad \beta_n \to \beta$$

در این صورت،

$$x_n + y_n \to x + y, \quad x_n \cdot y_n \to x \cdot y, \quad \beta_n x_n \to \beta x$$

برهان (آ) : فرض کنیم $a_n \to a$ چون به ازای هر i $(۱ \le i \le k)$

$$۰ \le |a_{in} - a_i| \le |a_n - a|$$

حال اگر $n \to \infty$، آنگاه نتیجه می‌شود $|a_{in} - a_i| \to ۰$، یعنی $a_{in} \to a_i$ حال فرض کنیم به ازای هر i، $a_{in} \to a_i$، $(۱ \le i \le k)$

$\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم، N_iای هست که اگر $n \ge N_i$، آنگاه $|a_{in} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ اگر $N = \max\{N_۱, \dots, N_k\}$، به ازای هر n، $n \ge N$، آنگاه

$$|a_n - a| = \sqrt{(a_{۱n} - a_۱)^۲ + \cdots + (a_{kn} - a_k)^۲} < \sqrt{\frac{\varepsilon^۲}{k} + \cdots + \frac{\varepsilon^۲}{k}} = \varepsilon \ .$$

برهان (ب) : حکم با توجه به تعریف جمع در $\mathbb{R}^k$ و تعریف ضرب عددی و قضیه‌ی حد مجموع و حد حاصلضرب نتیجه می‌شود.

زیردنباله‌ها

۱۱.۳ **تعریف.** فرض کنیم $\{a_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای در فضای متری X باشد، و $\{n_k\}_۱^\infty$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از $\mathbb{N}$ بتوی $\mathbb{N}$ باشد، در این صورت $\{a_{n_k}\}_۱^\infty$ را یک زیردنباله‌ی $\{a_n\}_۱^\infty$ خوانند در حقیقت زیرا یک دنباله، ترکیب آن دنباله با یک دنباله‌ی اکیداً صعودی از اعداد طبیعی است.

مثال. چندین زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_۱^\infty$:

1. $a_۱, a_۳, a_۵, \dots$
2. $a_۲, a_۴, a_۶, \dots$
3. $a_۱, a_۴, a_۹, \dots$
4. $a_۲, a_۳, a_۵, a_۷, a_{۱۱}, \dots$
5. $a_۳, a_۶, a_۹, \dots$
6. $a_۱, a_{۱۵}, a_{۱۹}, a_{۲۰}, a_{۲۱}, \dots$

7. $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, \ldots$

زیردنباله‌ی (۱) به ازای $n_k = ۲k - ۱$ و زیردنباله‌ی (۲) به ازای $n_k = ۲k$ به دست می‌آیند. هرگاه n_k نشان دهنده‌ی k اُمین عدد اول باشد، زیردنباله‌ی (۴) به دست می‌آید. به طور کلی، هر تعداد نامتناهی جمله که اندیس های صعودی داشته باشند یک زیردنباله‌ی a_n است. شماره‌ی (۷) نشان می‌دهد که هر دنباله، زیردنباله‌ی خود است (به ازای $n_k = k$ به دست می‌آید).

معمولاً $a_{۲n}$ و $a_{۲n-۱}$ را به ترتیب زیردنباله‌های زوج و فرد a_n گویند. در $\mathbb{R}^k$، رابطه‌ی بین همگرا یی زیردنباله‌های یک دنباله و خود دنباله در قضیه‌های زیر بیان شده است (البته در هر فضای متری برقراراست)

۱۲.۳ قضیه. $a_n \to P$ اگر و تنها اگر $a_{۲n} \to P$ و $a_{۲n-۱} \to P$.

برهان. فرض کنید $a_n \to P$،

$\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم، Nای هست که به ازای هر $n \geq N$، $|a_n - P| < \varepsilon$، حال اگر $n \geq N$، آنگاه $۲n \geq N$ و $۲n - ۱ \geq N$، پس

$$|a_{۲n} - P| < \varepsilon, \qquad |a_{۲n-۱} - P| < \varepsilon$$

بعکس. فرض کنیم $a_{۲n} \to P$ و $a_{۲n-۱} \to P$

$\varepsilon > ۰$ را در نظر بگیریم

$N_۱$ی هست که اگر $n \geq N_۱$، آنگاه $|a_{۲n} - P| < \varepsilon$

$N_۲$ی هست که اگر $n \geq N_۲$، آنگاه $|a_{۲n-۱} - P| < \varepsilon$

حال اگر $N = \max\{۲N_۱, ۲N_۲ - ۱\}$، آنگاه به ازای هر n اگر $n \geq N$، آنگاه اگر n زوج باشد یعنی $n = ۲k$ چون $۲k \geq ۲N_۱$ پس $k \geq N_۱$ درنتیجه

$$|a_n - P| = |a_{۲k} - P| < \varepsilon$$

ولی اگر n فرد باشد یعنی $n = ۲k - ۱$ چون $۲k - ۱ \geq ۲N_۲ - ۱$ پس $k \geq N_۲$ درنتیجه

$$|a_n - P| = |a_{۲k-۱} - P| < \varepsilon$$

قضایای مشابه ۱۲.۳ را می‌توان بیان و ثابت کرد. به عنوان نمونه‌ی قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم و برهان آن را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

۱۳.۳ **قضیه.** شرط لازم و کافی برای آن که دنباله‌ی $\{a_n\}_1^\infty$ همگرا به P باشد آن است که زیردنباله‌های $\{a_{3n}\}_1^\infty$ و $\{a_{3n-1}\}_1^\infty$ و $\{a_{3n-2}\}_1^\infty$ همگرا به P باشند.

مثال: دنباله‌ی حقیقی $a_n = (-1)^n$ همگرا نیست زیرا $a_{2n} \to 1$ ولی $a_{2n-1} \to -1$.

مثال: دنباله‌ی $S_n = i^n$ همگرا نیست زیرا

$$S_{4n} \to 1 \quad , \quad S_{4n+1} \to i$$

۱۴.۳ **قضیه.** فرض کنید $\{n_k\}_1^\infty$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ باشد در این صورت به ازای هر k، $n_k \geq k$.

برهان. به استقراء روی k، حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $k = 1$، آنگاه چون $n_1 \in \mathbb{N}$، پس $n_1 \geq 1$. فرض کنید $n_k \geq k$،

$$n_{k+1} > n_k \geq k \Leftarrow n_{k+1} \geq k + 1$$

۱۵.۳ **قضیه.** فرض کنید $\{a_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از فضای متری (X, d) باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که دنباله‌ی a_n همگرا به $P \in X$ باشد آن است که هر زیردنباله‌ی a_n همگرا به P باشد.

برهان لزوم. فرض کنید $\{a_{n_k}\}_1^\infty$ زیردنباله‌ی دلخواهی از $\{a_n\}_1^\infty$ باشد. $\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم، چون $a_n \to P$، پس

$$\exists N \; \forall n \; (n \geq N \Longrightarrow d(a_n, P) < \varepsilon) \qquad (6)$$

حال به ازای هر k، اگر $k \geq N$، آنگاه $n_k \geq N$، درنتیجه بنا بر رابطه‌ی (۶)، $d(a_{n_k}, P) < \varepsilon$. یعنی $a_{n_k} \to P$.

برعکس. فرض کنید همه‌ی زیردنباله‌های $\{a_n\}_1^\infty$ همگرا به P باشند چون $\{a_n\}_1^\infty$ خود زیردنباله‌ی $\{a_n\}_1^\infty$ است. پس همگرا به P است.

اینک این سئوال پیش می‌آید، اگر دنباله‌ای همگرا نباشد ممکن است آن دنباله دارای یک زیردنباله‌ی همگرا باشد. مثلاً دنباله‌ی $\frac{1}{n}$ در این فضای $X = (0, 1)$ با متر اقلیدسی همگرا نیست و هیچ کدام از زیردنباله‌های آن در این فضا همگرا نیستند. پاسخ سئوال قضیه‌ی زیر است.

۱۶.۳ **قضیه.**

(آ) هرگاه $\{P_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری و فشرده‌ی X باشد آنگاه زیردنباله‌ای از $\{P_n\}_1^\infty$ به نقطه‌ای از X همگرا است.

(ب) هر دنباله‌ی کراندار در $\mathbb{R}^k$ زیردنباله‌ی همگرایی دارد.

برهان.

(آ) با فرض $E = \{P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots\}$، اگر E متناهی باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $P \in E$ هست که بی نهایت بار تکرار می‌شود. حال زیردنباله‌ی P_{n_k} را چنین می‌سازیم n_1 را کوچکترین اندیس مانند m می‌گیریم که $P_m = P$، فرض کنیم N_k انتخاب شده باشد n_{k+1} را کوچکترین اندیس مانند m' می‌گیریم به طوری که $n_k < m'$ و $P_{m'} = P$ به دین ترتیب به استقراء زیردنباله‌ی $\{P_{n_k}\}_1^\infty$ معرفی شد که

$$P_{n_1} = P_{n_2} = \cdots = P_{n_k} = \cdots = P$$

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

اگر E نامتناهی باشد چون X فشرده است پس E حداقل یک نقطه‌ی حدّی مانند P در X دارد، زیردنباله‌ی $\{P_{n_k}\}_1^\infty$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم. n_1 را چنان می‌گیریم $d(P, P_{n_1}) < 1$، یعنی $P_{n_1} \in N_1(P) \cap E$. فرض کنیم n_1، n_2، ...، n_k انتخاب شده باشند چون $N_{\frac{1}{k+1}}(P) \cap E$ نامتناهی است، یک نقطه از این اشتراک مانند $P_{n_{k+1}}$ چنان می‌گیریم که $n_{k+1} > n_k$. پس زیردنباله انتخابی درشرط $0 < d(P_{n_k}, P) < \frac{1}{k}$ صدق می‌کند با حدگیری $k \to \infty$،

$$d(P_{n_k}, P) \to 0 \Longrightarrow P_{n_k} \to P$$

(ب) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathbb{R}^k$ باشد، پس بازه‌ی بسته‌ی k بعدی مانند I هست که $a_n \in I$ چون I فشرده است پس حکم بنا بر (آ) برقرار است.

۱۷.۳ تعریف. نقطه‌ی α از فضای متری X را یک حد زیردنباله‌ای دنباله‌ی $\{P_n\}_1^\infty$ گویند. هرگاه زیردنباله‌ای مانند $\{P_{n_k}\}_1^\infty$ موجود باشد به طوری که $P_{n_k} \to \alpha$.

مثال ۱. فرض کنید $S_n = i^n$، S_n دارای چهار حد زیردنباله‌ای 1، -1، i، $-i$ است.

مثال ۲. فرض کنید

$$a_n = \begin{cases} \frac{۱}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ \frac{n}{n+۱} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

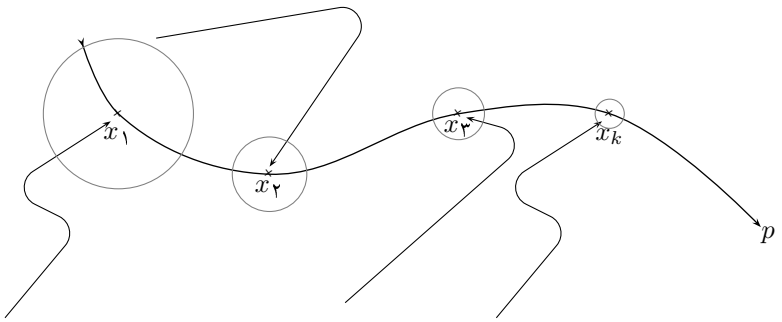
a_n در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$ دارای دو حد زیردنباله‌ای صفر و یک است در حالی که a_n در زیرفضای $X = (۰, ۱)$، حد زیر دنباله‌ای ندارد.

مثال ۳. فرض کنید $a_n = (-۱)^n n$، a_n در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}$، حد زیردنباله‌ای ندارد.

به خاصیتی از مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای توجه کنید:

۱۸.۳ قضیه. فرض کنیم $\{P_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری X باشد و E مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای P_n در X باشد در این صورت E بسته است.

برهان. فرض کنیم P نقطه‌ی حدی دلخواهی از E باشد (اگر E نقطه‌ی حدی نداشته باشد حکم برقرار است) پس دنباله‌ای از E مانند $\{x_n\}_۱^\infty$ هست به طوری که $\lim x_n = P$.



چون به ازای هر k، x_k یک حد زیردنباله‌ای P_n است پس زیردنباله‌ای از P_n همگرا به x_k وجود دارد. درنتیجه به ازای هر k، $N_{\frac{۱}{k}}(x_k) \cap \{P_n\}_۱^\infty$ نامتناهی است، حال زیردنباله‌ای از P_n را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم: نقطه‌ای از $N_۱(x_۱) \cap \{P_n\}_۱^\infty$ انتخاب کرده و $P_{n_۱}$ می‌نامیم. نقطه‌ای از $N_{\frac{۱}{۲}}(x_۲) \cap \{P_n\}_۱^\infty$ مانند $P_{n_۲}$ با شرط $n_۲ > n_۱$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنید P_{n_k} انتخاب شده باشد. نقطه‌ای از $N_{\frac{۱}{k+۱}}(x_{k+۱}) \cap \{P_n\}_۱^\infty$ مانند $P_{n_{k+۱}}$ را با شرط $n_{k+۱} > n_k$ انتخاب می‌کنیم.

بدین ترتیب زیردنباله‌ای از P_n مانند P_{n_k} به دست آوریم که در شرط

$\circ \le d(P_{n_k}, x_k) < \frac{1}{k}$ صدق می‌کند. نشان می‌دهیم $P_{n_k} \to P$،

$$\circ \le d(P_{n_k}, P) \le d(P_{n_k}, x_k) + d(x_k, P) < \frac{1}{k} + d(x_k, P)$$

حال اگر $k \to \infty$، آنگاه حد طرف دوم صفر است پس $P_{n_k} \to P$، یعنی P یک حد زیردنباله‌ای P_n است، یعنی $P \in E$.

در بخش بعدی بحث خود را محدود به دنباله‌های حقیقی می‌کنیم و مفاهیم حد بالا و پایین را تعریف کرده و خواص آن ها را بررسی خواهیم کرد.

۱۹.۳ **تعریف.** گوییم حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ برابر ∞ است هرگاه به ازای هر عدد مثبت مانند M عدد صحیحی مانند N موجود باشد به طوری که به ازای هر n اگر $n \in \mathbb{N}$، آنگاه $a_n > M$. به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall M > \circ \; \exists N \; \forall n \; (n \ge N \implies a_n > M)$$

به طریق مشابه $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$، تعریف می‌شود، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > \circ \; \exists N \; \forall n \; (n \ge N \implies a_n < -M)$$

مثال ۱. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} \frac{n^۲}{n+۱} = \infty$ فرض کنید $M > \circ$ دلخواه باشد، به ازای هر n اگر،

$$n \ge M + ۱ \implies \frac{n^۲}{n+۱} > \frac{n^۲ - ۱}{n+۱} = n - ۱ \ge M + ۱ - ۱ = M$$

فرض کنید $\mathbb{R}^*$ نشان دهنده‌ی دستگاه وسعت یافته‌ی اعداد حقیقی باشد یعنی $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$، به ازای هر دنباله‌ی حقیقی مانند $\{a_n\}_۱^\infty$، مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای $\{a_n\}_۱^\infty$ در $\mathbb{R}$ را با E و مجموعه‌ی کلیه‌ی حدود زیردنباله‌ای (در $\mathbb{R}^*$) را با E^* نشان خواهیم داد.

مثال ۲. فرض کنید

$$a_n = \begin{cases} (-۱)^n & n = ۳k \text{ اگر} \\ n & n \ne ۳k \text{ اگر} \end{cases}$$

در این صورت $E = \{-۱, ۱\}$ و $E^* = \{-۱, ۱, \infty\}$.

مثال ۳. دنباله‌ی k_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$k_n = \begin{cases} (-۱)^n & n = ۳k \text{ اگر} \\ (-۱)^n \times \frac{۲n}{n+۱} & n = ۳k+۱ \text{ اگر} \\ (-۱)^n n & n = ۳k+۲ \text{ اگر} \end{cases}$$

$$k_{۶n} = (-۱)^{۶n} \Longrightarrow k_{۶n} \to ۱$$
$$k_{۶n+۱} = (-۱)^{۶n+۱} \times \frac{۲(۶n+۱)}{۶n+۲} \Longrightarrow k_{۶n+۱} \to -۲$$
$$k_{۶n+۲} = (-۱)^{۶n+۲}(۶n+۲) \Longrightarrow k_{۶n+۲} \to +\infty$$
$$k_{۶n+۳} = (-۱)^{۶n+۳} = -۱ \Longrightarrow k_{۶n+۳} \to -۱$$
$$k_{۶n+۴} = (-۱)^{۶n+۴} \times \frac{۲(۶n+۴)}{۶n+۵} \Longrightarrow k_{۶n+۴} \to +۲$$
$$k_{۶n+۵} = (-۱)^{۶n+۵}(۶n+۵) \Longrightarrow k_{۶n+۵} \to -\infty$$

بنابراین مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای k_n در فضای متری $\mathbb{R}$، $E = \{-۱, ۱, -۲, ۲\}$ است، مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای k_n در فضای متری $\mathbb{R}^*$ برابر $E^* = \{\pm۱, \pm۲, \pm\infty\}$ است.

در قضیه‌ی ۱۸.۳ ثابت کردیم E بسته است.

۲۰.۳ **تعریف.** فرض کنیم $\{a_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای حقیقی و E^* مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای a_n در $\mathbb{R}^*$ باشد سوپرمم E^* را حد بالای a_n و اینفیمم E را حد پایین a_n گویند به ترتیب با علامت $\limsup_{n\to\infty} a_n$ (یا $\overline{\lim} a_n$) و $\liminf_{n\to\infty} a_n$ (یا $\underline{\lim} a_n$) نشان خواهیم داد پس $\liminf a_n = \inf E^*$ و $\limsup a_n = \sup E^*$ (سوپرمم و اینفیمم در $\mathbb{R}^*$ مورد نظر است)

مثال ۱. فرض کنید $a_n = (-۱)^n$، در این صورت $E^* = \{-۱, ۱\}$، پس،

$$\limsup (-۱)^n = ۱ \quad , \quad \liminf (-۱)^n = -۱$$

مثال ۲. فرض کنید $\{k_n\}$ دنباله‌ی تعریف شده در مثال ۳ از ۱۹.۳ باشد. در این صورت

$$\liminf k_n = -\infty \quad , \quad \limsup k_n = \infty$$

مثال ۳. فرض کنید $h_n = \frac{n}{n+۱}$، در این صورت $\liminf h_n = \limsup h_n = ۱$.

۲۱.۳ **قضیه.** شرط لازم و کافی برای آن که حد دنباله‌ی حقیقی $\{a_n\}_۱^\infty$ برابر α باشد ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) آن است که $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$.

برهان. هرگاه $a_n \to \alpha$، آنگاه $E^* = \{\alpha\}$ پس

$$\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$$

برعکس، فرض کنید $\limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$، درنتیجه $E^* = \{\alpha\}$، پس حد همه‌ی زیردنباله‌های a_n برابر α است در نتیجه $a_n \to \alpha$.

در قضیه‌ی زیر خواص حد بالا بیان شده، قضیه‌ی مشابه برای حد پایین را می‌توان بیان و ثابت کرد. این دو قضیه را خواص مشخصه‌ی حد بالا و پایین خواهیم نامید.

۲۲.۳ **قضیه.** فرض کنید $\{a_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای حقیقی و E^* مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای a_n بوده و α حد بالای a_n باشد (یعنی $\alpha = \sup E^*$) در این صورت

(آ) $\alpha \in E^*$، یعنی α حد یکی از زیردنباله‌های a_n است.

(ب) به ازای هر u، اگر $\alpha < u$، آنگاه Nای هست که به ازای هر n،

$$n \geq N \Longrightarrow a_n < u$$

(پ) فقط α در (آ) و (ب) صدق می‌کند.

برهان.

(آ) سه حالت در نظر می‌گیریم: (I) $\alpha = \infty$، (II) $\alpha \in \mathbb{R}$، (III) $\alpha = -\infty$.

حالت (I) $\alpha = \infty$، در این صورت E^* از بالا کراندار نیست، پس $\{a_n\}$ نیز از بالا کراندار نیست زیرا اگر a_n از بالا کراندار باشد باید E^* نیز از بالا کراندار باشد، چون a_n از بالا کراندار نیست پس

$$\forall k\ \exists n\ (a_n > k)$$

پس زیردنباله‌ای از a_n مانند a_{n_k} را می‌توان یافت که به ازای هر k، $a_{n_k} > k$، درنتیجه $\lim_{k\to} a_{a_{n_k}} = \infty$.

حالت (II) $\alpha \in \mathbb{R}$، در این صورت $\alpha = \sup E$، که E مجموعه‌ی حدود زیردنباله‌ای a_n در $\mathbb{R}$ است. و در ۱۸.۳ ثابت کردیم E بسته است، پس

$$\alpha \in \overline{E} = E \subseteq E^* .$$

حالت (III) $\alpha = -\infty$. در این صورت هیچ عدد حقیقی نمی‌تواند حد زیردنباله‌ای a_n باشد پس باید $E^* = \{-\infty\}$، البته در این حالت $\lim a_n = -\infty$.

(ب) (خلف) فرض کنید حکم برقرار نباشد یعنی uای باشد که $\alpha < u$ و

$$\forall N\ \exists n\ (n \geq N\ \&\ a_n \geq u) \qquad (۷)$$

رابطه‌ی (۷) نشان می‌دهد که به ازای نامتناهی n، a_n در نامساوی $a_n \geq u$ صدق می‌کند پس زیردنباله‌ای از a_n مانند a_{n_k} می‌توان یافت که

$$\forall k\ (a_{n_k} \geq u)$$

هرگاه β حد a_{n_k} یا حد یکی از زیردنباله‌های a_{n_k} باشد، آنگاه $\beta \geq u > \alpha$، امّا $\beta \in E^*$. باید $\beta \leq \alpha$، پس تناقض آشکار شد، خلف باطل است.

(پ) فرض کنید α' باشد که $\alpha' \neq \alpha$ و α' در (آ) و (ب) صدق کند فرض کنید $\alpha < \alpha'$، با انتخاب $u = \frac{\alpha+\alpha'}{۲}$، چون $\alpha < u$، پس بنا بر (ب)

$$\exists N\ \forall n\ (n \geq N \Longrightarrow a_n < u) \qquad (۸)$$

چون $\alpha' \in E^*$، پس $\{a_{n_k}\}_۱^\infty$ای هست که $\lim_{k\to} a_{n_k} = \alpha'$ با انتخاب $\varepsilon = \frac{\alpha'-\alpha}{۲}$، عددی مانند N' موجود است به طوری که به ازای هر k،

$$k \geq N' \Longrightarrow u = \alpha' - \varepsilon < a_{n_k} < \alpha' + \varepsilon \qquad (۹)$$

(۸) و (۹) در تناقض است.

در صورتی که $\alpha \in \mathbb{R}$، می‌توان قسمت (ب) در قضیه‌ی قبل را به صورت زیر بیان کرد:

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n\ (n \geq N \Longrightarrow a_n < \alpha + \varepsilon) \qquad (۱۰)$$

خاصیت مشخصه‌ی حد پایین، قضیه‌ی مشابه ۲۲.۳ را در مورد حد پایین به صورت زیر بیان می‌کنیم.

۲۳.۳ **قضیه.** شرط لازم و کافی برای آن که $\beta = \liminf a_n$، آن است که

(آ) $\beta \in E^*$، یعنی β حد یکی از زیردنباله‌های a_n باشد.

(ب) $\forall u\ (u < \beta \Longrightarrow \exists N\ \forall n\ (n \geq N \Longrightarrow u < a_n))$

در صورتی که $\beta \in \mathbb{R}$، می‌توان قسمت (ب) را به صورت زیر بیان کرد

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n\ (n \geq N \Longrightarrow \beta - \varepsilon < a_n) \qquad (۱۱)$$

در صورتی که حد بالا و پایین اعداد حقیقی باشند قضایای ۲۲.۳ و ۲۳.۳ را می‌توان به صورت های زیر بیان کرد.

۲۴.۳ **قضیه.** شرط لازم و کافی برای آن که عدد حقیقی α حد بالای a_n باشد آن است که

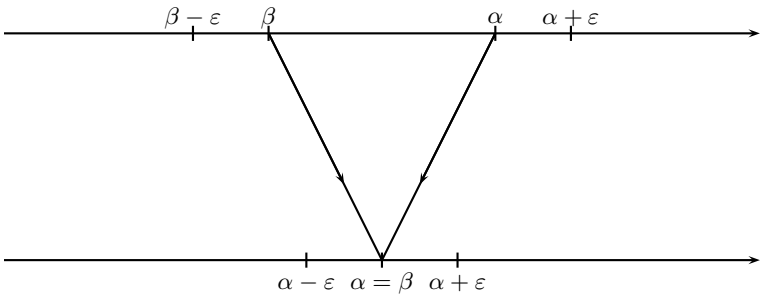
(آ) به ازای هر $\varepsilon > ۰$، بی نهایت بار $\alpha - \varepsilon < a_n$.

(ب) به ازای هر $\varepsilon > ۰$، از مرتبه‌ای به بعد $a_n < \alpha + \varepsilon$.

۲۵.۳ **قضیه.** شرط لازم و کافی برای آن که عدد حقیقی β حد پایین a_n باشد آن است که

(آ) به ازای هر $\varepsilon > ۰$، بی نهایت بار $a_n < \beta + \varepsilon$.

(ب) به ازای هر $\varepsilon > ۰$، از مرتبه‌ای به بعد $\beta - \varepsilon < a_n$.



نمودار حد داشتن در صورتی که $\alpha = \beta$.

تمرین. حد بالا و پایین دنباله‌های زیر را پیدا کنید.

۱) دنباله‌ی a_n: $۱, ۲, \frac{۱}{۲}, ۳, \frac{۱}{۳}, ۴, \frac{۱}{۴}, \ldots$

۲) $a_n = ۲ - n^{(-۱)^n}$

۳) $b_n = (-۱)^n \times \frac{۱}{۱+\frac{۱}{n}}$

۴) $a_n = (\frac{۳}{۲} + (-۱)^n)^n$

۵) (کروشه به معنی جزء صحیح) $d_n = (-\frac{۱}{۲})^{[\frac{n}{۲}]}(۱ - (-۱)^n + \frac{۱}{۲})$

مثال. چون اعداد گویا شمارش پذیر است پس می‌توان آن را یک دنباله فرض کرد. فرض کنیم $\{x_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ی اعداد گویا باشد. چون $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$، پس به ازای هر عدد حقیقی مانند x، می‌توان زیردنباله‌ای از x_n یافت که همگرا به x باشد.

در نتیجه هر عدد حقیقی یک حد زیردنباله‌ای آن است پس $E = R$ و $E^* = R^*$ پس

$$\limsup x_n = +\infty \ , \ \liminf x_n = -\infty$$

یک دنباله ممکن است حد نداشته باشد، امّا همواره حد بالا و پایین موجود است همواره $E^* \neq \varnothing$، قضیه‌ی زیر در عمل مفید می‌باشد.

۲۶.۳ قضیه. فرض کنیم Nای باشد که به ازای هر n، اگر $n \geq N$ آنگاه $a_n \leq b_n$ در این صورت،

(آ) $\limsup a_n \leq \limsup b_n$

(ب) $\liminf a_n \leq \liminf b_n$

توجه داشته باشید که از طرفین یک نامساوی نمی‌توان حد گرفت مگر این که حد هر دو طرف موجود باشد ولی در هر صورت از طرفین یک نامساوی می‌توان حد بالا و پایین گرفت.

برهان (آ). فرض کنید $\alpha = \limsup a_n$ و $\beta = \limsup b_n$.

(I) اگر $\beta = \infty$، حکم برقرار است.

(II) اگر $\beta = -\infty$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$، چون $a_n \leq b_n$ پس $\lim a_n = -\infty$ یعنی $\alpha = -\infty$ و حکم برقرار است.

(III) فرض کنید $\beta \in \mathbb{R}$، $\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم بنا بر خاصیت مشخصه‌ی حد بالا عددی طبیعی مانند N' موجود است که

$$\forall n(n \geq N' \Longrightarrow b_n < \beta + \varepsilon)$$

پس به ازای هر n، اگر $n \geq N + N'$، آنگاه

$$a_n < \beta + \varepsilon \qquad (۱۲)$$

چون α حد بالای a_n است پس زیردنباله‌ای مانند a_{n_k} موجود است که $\lim_{n\to} a_{n_k} = \alpha$. بنا بر (۱۲) به ازای هر $k \geq N + N'$. آنگاه

$$a_{n_k} < \beta + \varepsilon \overset{k\to\infty}{\Longrightarrow} \alpha \leq \beta + \varepsilon$$

چون $\varepsilon > ۰$ دلخواه بود پس $\alpha \leq \beta$.

(ب) را می‌توان به طریق مشابه ثابت کرد.

به عنوان کاربردی از خاصیت مشخصه‌ی حد بالا، مثال زیر را می‌آوریم.

مثال: فرض کنید $\{a_n\}_۱^\infty$ و $\{b_n\}_۱^\infty$ دنباله‌های حقیقی باشند. نشان دهید به شرط با معنی بودن داریم

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\overset{(۱)}{\leq} \liminf(a_n + b_n) \\ &\overset{(۲)}{\leq} \limsup(a_n + b_n) \\ &\overset{(۳)}{\leq} \limsup a_n + \limsup b_n \end{aligned}$$

حل: نامساوی (۲) قبلاً ثابت شده است، (۳) را ثابت می‌کنیم و (۱) به طریق مشابه ثابت می‌شود.

فرض کنید $\alpha = \limsup a_n$ و $\beta = \limsup b_n$، حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم

(I) اگر $\alpha = +\infty$، آنگاه $\beta \neq -\infty$ $(-\infty < \beta)$ پس طرف دوم $+\infty$ است و حکم برقرار است.

(II) اگر $\alpha = -\infty$، آنگاه $\beta < +\infty$، پس $\lim a_n = -\infty$ و b_n از بالا کراندار است در نتیجه

$$\lim(a_n + b_n) = -\infty \Longrightarrow \limsup(a_n + b_n) = -\infty$$

حال فرض کنید $\alpha \in R$، در این صورت حالتهای زیر اتفاق می‌افتد.

(III) اگر $\beta = +\infty$، مانند (I) ثابت می‌کنیم.

(IV) اگر $\beta = -\infty$، مانند (II) ثابت می‌کنیم.

(V) حال فرض کنید $\beta \in R$، $\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم بنا بر خاصیت مشخصه‌ی بالا (قضیه‌ی ۲۲.۳)،

$$\exists N_۱ \forall n (n \geq N_۱ \Longrightarrow a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{۲})$$

$$\exists N_۲ \forall n (n \geq N_۲ \Longrightarrow b_n < \beta + \frac{\varepsilon}{۲})$$

پس به ازای هر $n \geq N_۱ + N_۲$،

$$a_n + b_n < \alpha + \beta + \varepsilon$$

از طرفین حد بالا می‌گیریم (قضیه‌ی ۲۶.۳)، نتیجه می‌شود

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \alpha + \beta + \varepsilon$$

چون $\varepsilon > ۰$ دلخواه بود، پس

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \alpha + \beta$$

تمرین ۱. فرض کنید $\lim a_n = \alpha$ نشان دهید به شرط با معنی بودن داریم

$$\liminf(a_n + b_n) = \lim a_n + \liminf b_n$$

$$\limsup(a_n + b_n) = \lim a_n + \limsup b_n$$

تمرین ۲. فرض کنید $\{a_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای کراندار از اعداد مثبت باشد، نشان دهید

(آ) اگر $\limsup a_n > ۰$، آنگاه $\liminf \frac{۱}{a_n} = \frac{۱}{\limsup a_n}$

(ب) اگر $\liminf a_n > ۰$، آنگاه $\limsup \frac{۱}{a_n} = \frac{۱}{\liminf a_n}$

۲۷.۳ قضیه. فرض کنید $\{a_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ی حقیقی باشد و

$$\sigma_n = \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n}$$

در این صورت

$$\liminf a_n \le \liminf \sigma_n \le \limsup \sigma_n \le \limsup a_n$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $\limsup \sigma_n \le \limsup a_n$،
فرض کنید $\alpha = \limsup a_n$ و $\sigma = \limsup \sigma_n$. سه حالت در نظر می‌گیریم

حالت اول. اگر $\alpha = \infty$، حکم به وضوح برقرار است.

حالت دوم. فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$، $\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم بنابر خاصیت مشخصه‌ی حد بالا،

$$\exists N\ \forall n\ (n \ge N \Longrightarrow a_n < \alpha + \varepsilon)$$

حال به ازای هر $n \ge N$، می‌توان نوشت

$$\sigma_n = \frac{(a_۱ + \cdots + a_{N-۱}) + (a_N + \cdots + a_n)}{n}$$

عبارت $(a_۱ + \cdots + a_{N-۱})$ مقداری ثابت است و هر جمله از عبارت $(a_N + \cdots + a_n)$ از $\alpha + \varepsilon$ کوچکتر است پس

$$\sigma_n \le \frac{a_۱ + \cdots + a_{N-۱}}{n} + \frac{n - N + ۱}{n}\,(\alpha + \varepsilon)$$

از طرفین، حد بالا می‌گیریم، به دست می‌آوریم $\sigma \le \alpha + \varepsilon$، چون $\varepsilon > ۰$ دلخواه بود پس $\sigma \le \alpha$.

حالت سوم. $\alpha = -\infty$، در این صورت $\lim a_n = -\infty$، فرض کنید u عدد حقیقی باشد، چون $a_n \to -\infty$. پس

$$\exists N\ \forall n\ (n \ge N \Longrightarrow a_n < u)$$

$$\sigma_n \le \frac{a_۱ + \cdots + a_{N-۱}}{n} + \frac{n - N + ۱}{n} \cdot u$$

از طرفین، حد بالا می‌گیریم (قضیه‌ی ۲۶.۳)،

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n \le u$$

چون u دلخواه است پس $\limsup \sigma_n = -\infty$، در نتیجه

$$\lim \sigma_n = -\infty .$$

نتیجه‌ی زیر به قضیه‌ی حد اول کوشی معروف است.

۲۸.۳ **قضیه.** (حد اول کوشی) هرگاه $\lim a_n = \alpha$، آنگاه $\lim \sigma_n = \alpha$.

در ۳۷.۳ تعمیم این نتیجه را تحت عنوان قضیه‌ی اول شتولتس خواهیم آورد.

مثال. $\lim \frac{۱+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{n}}{n} = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}}{n} = ۰$

۲۹.۳ **نتیجه.** هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که به عدد مثبت l همگرا باشد آنگاه دنباله‌ی میانگین هندسی $\{(a_۱ \cdot a_۲ \cdots a_n)^{\frac{۱}{n}}\}_۱^\infty$ نیز همگرا به l است.

راهنمایی: $\ln(a_۱ \cdot a_۲ \cdots a_n)^{\frac{۱}{n}} = \frac{\ln a_۱ + \ln a_۲ + \cdots + \ln a_n}{n} \to \ln l$ (عکس مطلب برقرار نیست)

نتیجه‌ی زیر به قضیه‌ی حد دوم کوشی معروف است.

۳۰.۳ **نتیجه.** (قضیه‌ی دوم حد کوشی) هرگاه a_n دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = l$ آنگاه $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$، (عکس مطلب برقرار نیست)

برهان. قرار دهید $x_۱ = a_۱$ و $x_n = \frac{a_n}{a_{n-۱}}$ $(n \geq ۲)$، در این صورت $x_n \to l$،

$$\sqrt[n]{a_n} = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^{\frac{۱}{n}} \to l.$$

در قضیه‌ی ۳۲.۳ برهان دیگری برای مطلب فوق ارائه می‌شود.

مثال ۱. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$. چون $\lim_{n\to\infty} \frac{n+۱}{n} = ۱$ پس $\lim \sqrt[n]{n} = ۱$

مثال ۲. فرض کنید

$$a_n = \begin{cases} \frac{۱}{۲^n}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{۱}{۲^{n+۱}}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

در این صورت

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{۱}{۲}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{۱}{۲^{۱+\frac{۱}{n}}}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

بنابراین $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{۱}{۲}$ در حالی که

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \begin{cases} \frac{۱}{۴}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ ۱, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

پس $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ همگرا نیست.

۳۱.۳ **نتیجه.** فرض کنید $\{a_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای مختلط باشد و $\sigma_n = \frac{a_۱+\cdots+a_n}{n}$ در این صورت اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$، آنگاه $\lim \sigma_n = \alpha$. عکس مطلب برقرار نیست یعنی ممکن است σ_n حد داشته باشد ولی a_n حد نداشته باشد. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۱. فرض کنید $a_n = (-۱)^n$ در این صورت a_n حد ندارد ولی

$$۰ \le |\sigma_n| \le \frac{۱}{n} \Longrightarrow \sigma_n \to ۰$$

مثال ۲. فرض کنید a_n به صورت زیر تعریف شده باشد

$$a_n = \begin{cases} \sqrt[۳]{n}, & n = k^۳ \text{ اگر} \\ \frac{۱}{n}, & n \neq k^۳ \text{ اگر} \end{cases} \qquad k \text{ طبیعی،}$$

در این صورت $a_n > ۰$ و $\limsup a_n = \infty$، نشان می‌دهیم $\sigma_n \to ۰$. فرض کنید n دلخواه باشد و l بزرگترین عدد طبیعی باشد که $l^۳ \le n$ و نیز فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد که به صورت $k^۳$ نباشند $(k \in \mathbb{N})$ حال می‌توان نوشت

$$۰ \le \sigma_n = \frac{۱}{n}\left(\sum_{r=۱}^{l} a_{r^۳} + \sum_{r\in A} a_r\right).$$

امّا داریم

$$\frac{۱}{n}\sum_{r=۱}^{l} a_{r^۳} = \frac{۱}{n}\sum_{r=۱}^{l} r = \frac{l(l+۱)}{۲n} < \frac{\sqrt[۳]{n}(\sqrt[۳]{n}+۱)}{۲n} \to ۰$$

$$\frac{۱}{n}\sum_{r\in A} a_r < \frac{۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}}{n} \to ۰$$

پس $\sigma_n \to ۰$.

۳۲.۳ **قضیه.** فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد در این صورت

$$\liminf \frac{a_{n+۱}}{a_n} \overset{(۲)}{\le} \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \overset{(۱)}{\le} \limsup \frac{a_{n+۱}}{a_n}$$

اثبات (۱). فرض کنیم $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ هرگاه $\alpha = \infty$، آنگاه (۱) برقرار است، پس فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$، $\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم بنا به خاصیت مشخصه‌ی حد بالا

$$\exists N \; \forall k \; (k \geq N \Longrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} < \alpha + \varepsilon)$$

از طرفین نامساوی $\prod$ می‌گیریم به عبارت دیگر نامساوی های فوق را در هم ضرب می‌کنیم

$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} < \prod_{k=N}^{n-1} (\alpha + \varepsilon)$$

$$\frac{a_n}{a_N} < (\alpha + \varepsilon)^{n-N}$$

$$a_n < (\alpha + \varepsilon)^n [a_N (\alpha + \varepsilon)^{-N}]$$

از طرفین ریشه‌ی n می‌گیریم چون عبارت $a_N(\alpha + \varepsilon)^{-N}$ یک ثابت است A می‌نامیم

$$\sqrt[n]{a_n} < (\alpha + \varepsilon) \sqrt[n]{A}$$

از طرفین، حد بالا می‌گیریم چون $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A} = 1$ (چرا؟) پس

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha + \varepsilon$$

و چون $\varepsilon > 0$ دلخواه بود پس

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \alpha$$

نامساوی (۲) را به طریق مشابه ثابت می‌کنیم.

می‌توان قضیه‌ی حد دوم کوشی را از قضیه‌ی فوق نتیجه گرفت

نتیجه ۳۳.۳. هرگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$

قضیه‌ی زیر روشی برای محاسبه‌ی حد بالا و پایین یک دنباله ارائه می‌کند. برهان را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

۳۴.۳ قضیه. به ازای هر دنباله از اعداد حقیقی مانند $\{a_n\}$،

$$\limsup a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n \qquad (۱۳)$$

$$\liminf a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n \qquad (۱۴)$$

۳۵.۳ مثال.

(آ) $a_n = (-۱)^{n-۱}(۱ + \frac{۱}{n})$،

$$\begin{aligned}
\sup_{n\geq k} a_n &= \sup\{a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, \ldots\} \\
&= \sup\left\{(-۱)^{k-۱}\left(۱+\frac{۱}{k}\right), (-۱)^k\left(۱+\frac{۱}{k+۱}\right), \ldots\right\} \\
&= \begin{cases} ۱+\frac{۱}{k}, & \text{اگر } k \text{ فرد باشد} \\ ۱+\frac{۱}{k+۱}, & \text{اگر } k \text{ زوج باشد} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\limsup a_n = \inf(\sup_{n\geq k} a_n) = ۱$$

(ب) $a_n = ۱ + (-۱)^n$ در این صورت

$$\inf\{a_k, a_{k+۱}, \ldots\} = \inf\{۱ + (-۱)^k, ۱ + (-۱)^{k+۱}, \ldots\} = ۰$$

$$\Longrightarrow \liminf a_n = \sup\{۰, ۰, \ldots\} = ۰$$

(پ) $c_n = \frac{(-۱)^n}{n}$،

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \sup_k\{c_k, c_{k+۱}, \ldots\} \\
&= \sup_k\left\{\frac{(-۱)^k}{k}, \frac{(-۱)^{k+۱}}{k+۱}, \ldots\right\} \\
&= \begin{cases} \frac{۱}{k}, & \text{اگر } k \text{ زوج باشد} \\ \frac{۱}{k+۱}, & \text{اگر } k \text{ فرد باشد} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\limsup a_n = \inf \alpha_k = ۰$$

۳۶.۳ **قضیه.** (چزارو) هرگاه $\{a_n\}_۱^\infty$ و $\{b_n\}_۱^\infty$ دنباله‌هایی باشند که به ترتیب به a و b همگرا باشند، آنگاه

$$\lim_{n\to} \frac{a_۱b_n + a_۲b_{n-۱} + \cdots + a_nb_۱}{n} = ab\ .$$

برهان. فرض کنید $x_n = a_n - a$، پس $x_n \to ۰$، می‌توان نوشت

$$\frac{a_۱b_n + a_۲b_{n-۱} + \cdots + a_nb_۱}{n} = \frac{(x_۱ + a)b_n + (x_۲ + a)b_{n-۱} + \cdots + (x_n + a)b_۱}{n}$$

$$= a \times \frac{b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n}{n} + \frac{x_۱b_n + x_۲b_{n-۱} + \cdots + x_nb_۱}{n}$$

چون حد جمله‌ی اول برابر ab است. کافی است ثابت کنیم حد جمله‌ی دوم برابر صفر است. قرار می‌دهیم $B = \sup_n |b_n|$.

$$\left|\frac{x_۱b_n + x_۲b_{n-۱} + \cdots + x_nb_۱}{n}\right| \le B \times \frac{|x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n|}{n} \to ۰$$

اینک قضایای شتولتس را که اولی تعمیم قضیه‌ی حد اول کوشی است می‌آوریم.

۳۷.۳ **قضیه.** (قضیه‌ی اول شتولتس) فرض کنیم $\{p_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که

$$S_n = p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n \to \infty$$

در این صورت اگر $\lim a_n = \alpha$، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_۱a_۱ + p_۲a_۲ + \cdots + p_na_n}{p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n} = \alpha$$

این قضیه را می‌توان به صورت مستقیم ثابت کرد. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

۳۸.۳ **قضیه.** با مفروضات قضیه‌ی ۳۷.۳، و $b_n = \frac{\sum_۱^n p_ka_k}{\sum_۱^n p_k}$، نشان دهید

$$\liminf a_n \le \liminf b_n \le \limsup b_n \le \limsup a_n$$

برهان. مانند ۲۷.۳ عمل کنید برای نمونه، فرض کنید $\alpha = \limsup a_n$، $\beta = \limsup b_n$. حالتی که $\alpha \in \mathbb{R}$، به صورت زیر ثابت می‌شود.
$\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم بنا بر خاصیت مشخصه حد بالا

$$\exists N \; \forall n \; (n \geq N \Longrightarrow a_n < \alpha + \varepsilon) \qquad (۱۵)$$

چون $a_1 p_1 + \cdots + a_N p_N = A$ مقدار ثابتی است پس $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{S_n} = 0$ به ازای هر $n \geq N$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1 p_1 + \cdots + a_N p_N}{S_n} + \frac{p_{N+1} a_{N+1} + \cdots + p_n a_n}{S_n} \\ &\leq \frac{A}{S_n} + \frac{(\alpha+\varepsilon)(p_{N+1} + \cdots + p_n)}{S_n} \\ &= \frac{A}{S_n} + (\alpha+\varepsilon) \times \frac{S_n - S_N}{S_n} \\ &= \frac{A}{S_n} + (\alpha+\varepsilon)(1 - \frac{S_N}{S_n}) \end{aligned}$$

از طرفین، حد بالا می‌گیریم $\beta \leq \alpha + \varepsilon$، چون $\varepsilon > 0$ دلخواه بود پس $\beta \leq \alpha$. سایر حالتها به طریق مشابه ۲۷.۳ ثابت می‌شود.
قضیه‌ی ۳۵.۳ به عنوان نتیجه‌ای از ۳۸.۳ به دست می‌آید.

۳۹.۳ قضیه. (قضیه‌ی دوم شتولتس) فرض کنید $\{y_n\}_1^\infty$ و $\{x_n\}_1^\infty$ دنباله‌های از اعداد باشند به طوری که $\lim y_n = \infty$ و از مرتبه‌ای به بعد $y_n < y_{n+1}$، در این صورت اگر $(\alpha \in \mathbb{R}^*) \lim_{n\to} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \alpha$ آنگاه $\lim \frac{x_n}{y_n} = \alpha$.

برهان. دنباله‌های $\{p_n\}_1^\infty$ و $\{a_n\}_1^\infty$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p_1 = y_1 \quad , \quad p_n = y_{n+1} - y_n \quad , \quad n \geq 1$$

$$x_1 = p_1 a_1 \quad , \quad x_{n+1} - x_n = p_n a_n$$

در نتیجه از مرتبه‌ای به بعد $p_n > 0$ و $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = y_n \to \infty$ و $a_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ بنا بر این a_n و p_n در شرایط قضیه‌ی اول شتولتس صدق می‌کنند، پس اگر $\lim a_n = \alpha$ آنگاه $\lim \frac{x_n}{y_n} = \alpha$.

۴۰.۳ مثال.

۱) فرض کنید $p \in \mathbb{N}$، مقدار حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱^p + ۲^P + ۳^p + \cdots + n^p}{n^{p+۱}}$$

حل: فرض کنید $x_n = ۱^p + ۲^P + ۳^p + \cdots + n^p$ و $y_n = (n+۱)^{p+۱}$، در این صورت

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+۱} - x_n}{y_{n+۱} - y_n} &= \frac{(n+۱)^p}{(n+۱)^{p+۱} - (n)^{p+۱}} \\
&= \frac{(n+۱)^p}{\binom{p+۱}{۱} n^p + \binom{p+۱}{۲} n^{p-۱} + \cdots + \binom{p+۱}{p+۱}} \\
&\to \frac{۱}{p+۱}
\end{aligned}$$

توجه. حد فوق را می‌توان به کمک یک انتگرال معین محاسبه کرد.

۲) مطلوبست $\lim \frac{\ln n}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}}$.

حل: فرض کنیم $x_n = \ln n$ و $y_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$ در این صورت

$$\begin{aligned}
\lim \frac{x_n}{y_n} &= \lim \frac{x_{n+۱} - x_n}{y_{n+۱} - y_n} \\
&= \lim \frac{\ln(n+۱) - \ln n}{\frac{۱}{n+۱}} \\
&= \lim (n+۱) \ln \frac{n+۱}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln(۱ + \frac{۱}{n})^{n+۱} \\
&= \ln e \\
&= ۱
\end{aligned}$$

به تمرین ۷ همین بخش توجه کنید. روش دیگری برای محاسبه‌ی حد فوق ارائه شده است.

۳) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$$

قرار دهید $x_n = \ln n!$ و $y_n = \ln n^n$، به ازای هر n، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+۱} - x_n}{y_{n+۱} - y_n} &= \frac{\ln(n+۱)}{(n+۱)\ln(n+۱) - n\ln n} \\ &= \frac{\ln(n+۱)}{\ln(n+۱) + n\ln(n+۱) - n\ln n} \\ &= \frac{\ln(n+۱)}{\ln(n+۱) + \ln(۱+\frac{۱}{n})^n}\end{aligned}$$

چون $\ln(۱+\frac{۱}{n})^n \to ۱$ پس $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = ۱$.

طریق دوم: فرض کنید $a_n = \frac{\ln n!}{n\ln n}$، در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{\frac{۱}{n}\ln n!}{\ln n} \\ &= \frac{\ln \sqrt[n]{n!}}{\ln n} \\ &= \frac{\ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \times n}{\ln n} \\ &= \frac{\ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} + \ln n}{\ln n}\end{aligned}$$

با توجه به تمرین ۱ از همین بخش $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{۱}{e}$، پس $\lim a_n = ۱$.

۴۱.۳ تمرین.

۱) فرض کنید $a_n = \frac{n^n}{n!}$ ثابت کنید $\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = e$ و با استفاده از قضیه‌ی ۳۳.۳، نتیجه بگیرید که $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ (آیا می‌توانید این حد را با استفاده از یک انتگرال معین مناسب حل کنید.)

۲) حد بالا و پایین دنباله‌های زیر را بیابید

(آ) $a_n = \cos n$

(ب) $b_n = \sin \frac{n\pi}{۲} \cos \frac{n\pi}{۲}$

(پ) $c_n = n \sin \frac{n\pi}{۳}$

۳) دنباله‌ی $\{S_n\}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$S_۱ = ۰ \ , \ S_{۲n} = \frac{S_{۲n-۱}}{۲} \ , \ S_{۲n+۱} = \frac{۱}{۲} + S_{۲n}$$

حد بالا و پایین S_n را پیدا کنید.

۴) $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی حقیقی اند

(آ) به شرط با معنی بودن ثابت کنید

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

(ب) هرگاه $a_n \geq ۰$ و $b_n \geq ۰$ به شرط با معنی بودن ثابت کنید

$$\limsup a_n b_n \leq (\limsup a_n)(\limsup b_n)$$

۵) فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌های کراندار باشند نشان دهید

$$\liminf(a_n + b_n) \leq \liminf a_n + \limsup b_n \leq \limsup(a_n + b_n)$$

در صورتی که $a_n \geq ۰$ و $b_n \geq ۰$، آنگاه

$$\liminf a_n b_n \leq \liminf a_n \times \limsup b_n \leq \limsup a_n b_n$$

٦) ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{n^۲ + k}} = ۱$$

$$\lim \sum_{۱}^{n} \frac{۱}{\sqrt{n+k}} = \infty \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{۱}^{n} \frac{۱}{n^۲ + k} = ۰$$

*۷) فرض کنید f تابعی نامنفی و نزولی بر$[۱, \infty)$ باشد و

$$x_n = \sum_{k=۱}^{n} f_k - \int_{۱}^{n} f(x)\,dx$$

نشان دهید x_n یکنوا و کراندار است پس x_n همگراست.

۱) با انتخاب $f(x)=\frac{۱}{x}$، نتیجه می‌شود

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n} - \ln n$$

پس نتیجه می‌شود x_n نزولی و کراندار است پس x_n همگراست. حد این دنباله را ثابت اویلر می‌نامند و تقریباً برابر است با ۰/۵۷۷. هرگاه دنباله‌ی b_n را چنین تعریف کنیم

$$b_n = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \cdots - \frac{۱}{۲n} \quad \text{یا} \quad b_n = \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$$

آنگاه $b_n \to \ln ۲$ (راهنمایی: $b_n = x_{۲n} - x_n + \ln ۲$)

۲) ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sum_{۱}^{n} \frac{۱}{k}} = ۱$ (راهنمایی: قرار دهید $f(x)=\frac{۱}{x}$)

۳) حد $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\cdots+\sqrt{n}}{۲\sqrt{n}}$ را حساب کنید

دنباله‌های کوشی

در تعریفی که قبلاً برای همگرایی یک دنباله به کار بردیم حد آن دنباله دخالت داشت آیا می‌توان بدون حضور حد، وجود حد را ثابت کرد؟ در دنباله‌هایی که دسترسی به مقدار واقعی حد معمولاً امکان پذیر نیست (مانند سریها) ضابطه‌ای که بدون حضور حد، وجود حد را ثابت کند ضابطه‌ای مطلوب خواهد بود. در این دو بخش دنباله‌های کوشی و دنباله‌های یکنوا را معرفی خواهیم کرد که هر دو، آن هدف را تعقیب می‌کنند.

۴۲.۳ **تعریف.** دنباله‌ی $\{a_n\}_{۱}^{\infty}$ در فضای متری (X,d) را یک دنباله‌ی کوشی خوانیم یا گوییم a_n در شرط کوشی صدق می‌کند هرگاه،

به ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند N باشد به طوری که به ازای هر n و m،

$$(n, m \geq N \Longrightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon) \qquad (۱۶)$$

تعریف فوق را می‌توان به صورتهای معادل زیر بیان کرد.

به ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند N باشد به طوری که به ازای هر n،

$$(n \geq N \Longrightarrow d(a_n, a_N) < \varepsilon) \qquad (۱۷)$$

به ازای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند N باشد به طوری که به ازای هر n و k،

$$(n \geq N \Longrightarrow d(a_{n+k}, a_n) < \varepsilon) \qquad (۱۸)$$

مثال ۱. نشان می‌دهیم دنباله‌ی $a_n = \frac{۱}{n}$، یک دنباله‌ی کوشی است. $\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم، اگر $N = \frac{۲}{\varepsilon}$، آنگاه به ازای هر n و m،

$$n \geq \frac{۲}{\varepsilon}\ ,\ m \geq \frac{۲}{\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{۱}{n} - \frac{۱}{m}\right| < \frac{۱}{n} + \frac{۱}{m} \leq \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon\ .$$

مثال ۲. نشان دهید دنباله‌ی $a_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$ یک دنباله‌ی کوشی نیست. حکم زیر را ثابت می‌کنیم

$$\exists \varepsilon\ \forall N\ \exists n\ \exists m\ (n, m \geq N\ \&\ |a_n - a_m| \geq \varepsilon)$$

فرض کنید $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$ و N عدد طبیعی دلخواه باشد با انتخاب $m = N + ۱$ و $n = ۲N$،

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=N+۱}^{۲N} \frac{۱}{k} \geq \sum_{k=N+۱}^{۲N} \frac{۱}{۲N} = N \times \frac{۱}{۲N} = \frac{۱}{۲}$$

ثابت خواهیم کرد در فضاهای فشرده و $\mathbb{R}^k$، کوشی بودن معادل همگرایی است ابتدا نشان می‌دهیم در هر فضای متری، هر دنباله‌ی همگرا در شرط کوشی صدق می‌کند.

۴۳.۳ **قضیه.** در هر فضای متری، هر دنباله‌ی همگرا یک دنباله‌ی کوشی است.

برهان. فرض کنید $\{P_n\}$ دنباله‌ای همگرا به P در فضای (X, d) باشد. $\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم. Nای هست که به ازای هر n،

$$(n \geq N \Longrightarrow d(P_n, P) < \frac{\varepsilon}{۲}) \qquad (۱۹)$$

پس به ازای هر n و m، اگر $n, m \geq N$، آنگاه

$$d(P_n, P_m) \leq d(P_n, P) + d(P, P_m) < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

توجه کنید، عکس قضیه برقرار نیست زیرا دنباله‌ی $a_n = \frac{۱}{n}$ دنباله‌ای از زیرفضای $X = (۰, ۱)$ است که در شرط کوشی صدق می‌کند اما در این فضا همگرا نیست. ابتدا نشان می‌دهیم هر دنباله کوشی کراندار است. سپس عکس قضیه‌ی ۴۳.۳ را در فضاهای فشرده و $\mathbb{R}^k$ ثابت می‌کنیم.

۴۴.۳ قضیه. در هر فضای متری، هر دنباله‌ی کوشی کراندار است.

برهان. فرض کنید $\{P_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای کوشی از فضای (X,d) باشد. با انتخاب $\varepsilon = 1$، Nای هست که به ازای هر $n,m \geq N$، $d(P_n,P_m) < 1$. در نتیجه به ازای هر $n \geq N$، $d(P_n,P_N) < 1$، یعنی همه‌ی a_nها بجز احتمالاً a_1، a_2، ...، a_{N-1}، عضو $N_1(a_N)$ می‌باشند. حال اگر $r = \max_{1\leq i\leq N} d(a_i,a_N) + 1$ آنگاه به ازای هر n، $a_n \in N_r(a_N)$.

۴۵.۳ قضیه.

(آ) در هر فضای فشرده، هر دنباله‌ی کوشی همگراست.

(ب) در $\mathbb{R}^k$، هر دنباله‌ی کوشی همگراست.

برهان.

(آ) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کوشی در فضای فشرده (X,d) باشد چون X فشرده است پس زیردنباله‌ای مانند $\{a_{n_k}\}_1^\infty$ موجود است که به نقطه‌ای مانند $P \in X$ همگراست. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} a_n = P$. $\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم، چون a_n در شرط کوشی صدق می‌کند. پس،

$$\exists N_1\ \forall n,m\ (n,m \geq N_1 \Longrightarrow d(a_n,a_m) < \frac{\varepsilon}{2}) \qquad (20)$$

چون $a_{n_k} \to P$، پس

$$\exists N_2\ \forall k\ (k \geq N_2 \Longrightarrow d(a_{n_k},P) < \frac{\varepsilon}{2}) \qquad (21)$$

حال فرض کنید $k = N_1 + N_2$، پس به ازای هر $n \geq N_1$،

$$d(a_n,P) \leq d(a_n,a_{n_k}) + d(a_{n_k},P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ب) فرض کنید $\{P_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای کوشی در $\mathbb{R}^k$ باشد، چون P_n کراندار است پس حجره‌ی k بعدی مانند I هست که $P_n \in I$، چون I فشرده است پس حکم از (آ) نتیجه می‌شود.

قضیه‌ی ۴۳.۳ و ۴۵.۳ را توأم به صورت زیر می‌توان بیان کرد. در فضاهای فشرده و $\mathbb{R}^k$:

$$a_n \text{ همگراست} \iff a_n \text{ کوشی است}$$

۴۶.۳ **تعریف.** فضای متری را که در آن هر دنباله‌ی کوشی همگرا باشد تام گویند.
پس هر فضای فشرده تام است. $\mathbb{R}^k$ با متر اقلیدسی تام است. هر مجموعه‌ی بسته در یک فضای فشرده چون فشرده است پس تام است.

دنباله‌های یکنوا

۴۷.۳ **تعریف.** فرض کنید $\{a_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای از اعداد باشد

(I) $\{a_n\}$ را صعودی خوانیم هرگاه به ازای هر n، $a_n \le a_{n+1}$.

(II) $\{a_n\}$ را اکیداً صعودی خوانیم هرگاه به ازای هر n، $a_n < a_{n+1}$.
دنباله‌ی نزولی و اکیداً نزولی به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

(III) $\{a_n\}$ را یکنوا خوانیم اگر صعودی یا نزولی باشد.

عبارت $a_n \uparrow$ به معنی a_n صعودی است و $a_n \downarrow$ به معنی a_n نزولی است.

۴۸.۳ **قضیه.** هر دنباله‌ی صعودی حد دارد، به عبارت بهتر

هر دنباله‌ی صعودی اگر از بالا محدود باشد همگراست و حد آن سوپرمم آن است ولی اگر از بالا محدود نباشد حدّش $+\infty$ است.

برهان. فرض کنیم $\{S_n\}_1^\infty$ دنباله‌ای صعودی بوده و E برد S_n باشد. چون S_n کراندار است پس سوپرمم E موجود است. نشان می‌دهیم $\lim_{n\to\infty} S_n = \sup E$.
فرض کنیم $\alpha = \sup E$، $\varepsilon > 0$ دلخواه در نظر می‌گیریم. بنا بر خاصیت مشخصه‌ی سوپرمم Nی هست که $\alpha - \varepsilon < S_N$. حال اگر $n \ge N$ آنگاه

$$\alpha - \varepsilon < S_N \le S_n \le \alpha < \alpha + \varepsilon$$

قضیه‌ی مشابه برای دنباله‌های نزولی به صورت زیر بیان می‌شود.

۴۹.۳ **قضیه.** هر دنباله‌ی نزولی و از پایین محدود همگراست و حدّش اینفیمم آنست. در حقیقت اگر دنباله نزولی و از پایین محدود باشد همگراست و الا حدش $-\infty$ است.

دو قضیه‌ی فوق، همانند شرط کوشی، اثبات وجود حد بدون حضور حد را ممکن می‌سازند.

۵۰.۳ مثال.

۱) دنباله‌ی a_n در شرط $a_1 = 1$ و به ازای هر n، $|a_{n+1}| \overset{(*)}{\leq} \lambda |a_n|$، $(0 < \lambda < 1)$ صدق می‌کند ثابت کنید همگراست و حدش را پیدا کنید.

حل: چون $|a_{n+1}| \leq \lambda |a_n| < |a_n|$ پس دنباله‌ی $|a_n|$ نزولی است و چون $|a_n| \geq 0$ پس از پایین محدود است در نتیجه همگراست فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \alpha$ از طرفین رابطه‌ی $(*)$ حد می‌گیریم پس $\alpha \leq \lambda\alpha$ در نتیجه $\alpha = 0$ پس $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

۲) دنباله‌ی S_n به صورت زیر تعریف شده

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{2} \\ S_{n+1} = \sqrt{2 + S_n} \qquad (n \geq 1) \end{cases}$$

ثابت کنید S_n همگراست. حد S_n را پیدا کنید.

حل: ثابت می‌کنیم S_n صعودی است (به استقراء)
اگر $n = 1$، حکم برقرار است، فرض کنید $S_n \leq S_{n+1}$ در این صورت می‌توان نوشت،

$$S_{n+1} = \sqrt{2 + S_n} \leq \sqrt{2 + S_{n+1}} = S_{n+2}$$

پس S_n صعودی است در نتیجه حد S_n موجود است. فرض کنید $\lim S_n = \alpha$ با حد گیری از رابطه‌ی $S_{n+1} = \sqrt{2 + S_n}$، نتیجه می‌شود $\alpha = \sqrt{2 + \alpha}$ پس $\alpha = 2$ یا $\alpha = \infty$. برای همگرایی S_n، کافی است نشان دهیم S_n از بالا محدود است، نشان می‌دهیم به ازای هر n، $S_n \leq 2$،(به استقراء) به ازای $n = 1$ حکم برقرار است. فرض کنید $S_n \leq 2$ و

$$S_{n+1} = \sqrt{2 + S_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$$

بنابراین S_n همگرا به ۲ است.

در چنین مسئله‌هایی ابتدا باید وجود حد ثابت شود. سپس از رابطه‌ی استقرائی حد گرفته شود. مثلاً دنباله‌ی $\{a_n\}_1$ در شرط $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$ صدق می‌کند اگر بدون اثبات وجود حد از طرفین رابطه‌ی تراجعی حد بگیریم (با فرض $\alpha = \lim a_n$) خواهد شد.

$$\alpha = 2\alpha + 1 \Longrightarrow \alpha = -1.$$

در حالی که دنباله‌ی a_n همواره مثبت و حدّش $+\infty$ است.

۵۱.۳ تمرین.

۱) هرگاه $۰ < x_۱ < ۱$ به ازای هر n، $x_{n+۱} = ۱ - \sqrt{۱ - x_n}$ ثابت کنید $\{x_n\}$ نزولی و حدّش صفر است و نیز ثابت کنید $\frac{x_{n+۱}}{x_n} \to \frac{۱}{۴}$

۲) هرگاه $۰ < a_۱ < ۱$ و $a_{n+۱} = \sqrt{۲ + \sqrt{a_n}}$ ثابت کنید a_n همگراست.

۳) ثابت کنید دنباله‌ی $a_n = \frac{۱}{n+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$ صعودی و از بالا محدود است. حد این دنباله را می‌توان به کمک یک انتگرال معین نیز حساب کرد.

۴) دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی

$$a_۰ = ۰ \quad , \quad a_n = \frac{۱}{۱ + a_{n-۱}} \quad n \geq ۱$$

تعریف شده است. ثابت کنید همگراست و حد آن را تعیین کنید.

۵) دنباله‌ی $\{a_n\}$ با ضابطه‌ی

$$a_۰ = ۲ \quad , \quad a_n = \frac{۲}{۱ + a_{n-۱}}$$

تعریف شده است ثابت کنید همگراست و حد آن را تعیین کنید.

حال به بررسی چند دنباله‌ی خاص که در بخش های بعدی به آن ها بر می‌خوریم می‌پردازیم.

۵۲.۳ قضیه.

(آ) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$

(ب) هرگاه $P > ۰$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P} = ۱$

(پ) $a \in \mathbb{R}$،

اگر $|\alpha| < ۱$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n = ۰$

اگر $\alpha = -۱$، آنگاه a^n حد ندارد

اگر $\alpha > ۱$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$

اگر $\alpha = ۱$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a^n = ۱$

اگر $\alpha < -۱$، آنگاه a^n حد ندارد

(ت) هرگاه $|a| > ۱$ و $\alpha > ۰$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = ۰$

(ث) هرگاه $|a| < ۱$، آنگاه $\lim n^k a^n = ۰$ (k ثابت است)

(ج) $(a \in \mathbb{R})$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = ۰$

(چ) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = ۰$

اثبات به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

۵۳.۳ تمرین‌های گوناگون

۱) فرض کنید $a_n > ۰$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \alpha$ نشان دهید.

(آ) اگر $\alpha > ۱$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(ب) اگر $۰ < \alpha < ۱$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$.

۲) فرض کنید $a_۰ > ۰$ و k عدد حقیقی مثبتی باشد و

$$a_{n+۱} = a_n + \frac{k - a_n^۲}{۲a_n} \quad ,(n \geq ۰)$$

نشان دهید $\lim a_n = \sqrt{k}$.

۳) نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{۲^n + ۳^n} = ۳$، به طور کلی اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k، اعداد مثبتی باشند آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_k^n} = \max_{۱\leq i\leq k} a_i$$

۴) فرض کنید α عددی مثبت و β ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^۲ + x = \alpha$ باشد دنباله‌ی $\{a_n\}_۱^\infty$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{cases} ۰ \leq a_۱ < \beta \\ a_{n+۱} = \frac{\alpha}{۱+a_n} \quad ,n \geq ۱ \end{cases}$$

ثابت کنید زیردنباله‌های $a_{۲n}$ و $a_{۲n-۱}$ یکنوا هستند و $\lim a_n = \beta$

۵) نشان دهید $\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+۱}-\sin\sqrt{n})=۰$

۶) نشان دهید $\lim_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^۲+۱}=۰$

۷) دنباله‌ی a_n چنین تعریف شده است $a_{n+۲}=\frac{a_{n+۱}+a_n}{۲}$، نشان دهید a_n همگراست و حد آن را بیابید.

۸) فرض کنید $a_۱=۱$ و $a_{n+۱}=\sqrt{۲a_n}$، نشان دهید $a_n\to ۲$

۹) دنباله‌ی $\{x_n\}_۱^\infty$ به صورت زیر تعریف شده است

$$x_۱=\sqrt{a}\ \ ,\ \ x_{n+۱}=\sqrt{a+x_n}$$

نشان دهید x_n همگراست.

۱۰) فرض کنید $a>b>۰$ و

$$a_۱=\frac{a+b}{۲}\quad ,\quad a_{n+۱}=\frac{a_n+b_n}{۲}$$

$$b_۱=\frac{۲ab}{a+b}\quad ,\quad b_{n+۱}=\frac{۲a_nb_n}{a_n+b_n}$$

ثابت کنید $a_n>a_{n+۱}>b_{n+۱}>b_n$ و

$$\lim a_n=\lim b_n=\sqrt{ab}$$

۱۱) فرض کنید $a>b>۰$ و $a_۱=a$، $b_۱=b$ و

$$a_{n+۱}=\sqrt{a_nb_n}\ \ ,\ \ b_{n+۱}=\frac{a_n+b_n}{۲}$$

ثابت کنید a_n و b_n همگرا هستند.

۱۲) فرض کنید $a_۱=\sqrt{۲}$ و $a_{n+۱}=\sqrt{۲a_n}$، ثابت کنید a_n همگراست (راهنمائی: به استقراء نشان دهید $a_n<۲$ و $a_{n+۱}-a_n=\sqrt{a_n}(\sqrt{۲}-\sqrt{a_n})\geq ۰$)

۱۳) فرض کنید $x_۱=a$ و $x_{n+۱}=\frac{۱}{۴}(x_n^۲+۳)$، ثابت کنید x_n همگراست.

۱۴) فرض کنید α و β اعداد مثبتی باشند و

$$x_۰=\beta\ \ ,\ \ x_n=\frac{۱}{۲}\left(x_{n-۱}+\frac{\alpha}{x_{n-۱}}\right)$$

نشان دهید $x_n\to\sqrt{\alpha}$.

سری ها

تا پایان این فصل همه‌ی دنباله‌ها و سری های مورد بحث مختلط فرض خواهند شد و در غیر آن صورت صریحاً بیان خواهد شد.

۵۴.۳ تعریف. با فرض معلوم بودن دنباله‌ی $\{a_n\}_1^\infty$، دنباله‌ی $\{S_n\}_1^\infty$ با ضابطه‌ی $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ را سری a_n یا سری با مولّد a_n گویند و با علامت

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{یا} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{یا} \quad \sum a_n$$

نیز نشان می‌دهند. S_n ها را مجموع های جزئی $\sum_1^\infty a_n$ نیز گویند.

هرگاه دنباله‌ی $\{S_n\}$ همگرا به S باشد گوییم $\sum_1^\infty a_n$ همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n=1}^\infty a_n = S$. پس بر طبق تعریف $\sum_1^\infty a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ (البته به شرط وجود حد)

علامت $\sum_1^\infty a_n$ به دو منظور به کار برده می‌شود : یکی برای نمایش خود سری، یعنی نمایش دنباله‌ی $\{S_n\}_1^\infty$ و دیگری برای نمایش حد S_n (البته در صورت همگرا بودن) توجه کنید

(آ) منظور از جمله‌ی «آیا $\sum_1^\infty a_n$ همگراست؟» یعنی آیا S_n همگراست؟

(ب) و جمله‌ی «مقدار $\sum_1^\infty a_n$ چقدر است؟» یعنی حد S_n چقدر است؟

در صورتی که $\{S_n\}$ واگرا باشد گویند $\sum_1^\infty a_n$ واگراست.

چون همگرایی $\sum_1^\infty a_n$، همگرایی S_n تعریف شد پس همه‌ی مطالب اثبات شده در بخش دنباله را می‌توان برای سری‌ها توسیع داد به عنوان مثال شرط کوشی برای سری‌ها که از اهمیت خاصی نیز برخوردار است به صورت زیر است.

۵۵.۳ قضیه. (شرط کوشی برای همگرایی سری ها) $\sum_1^\infty a_n$ همگراست اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند N موجود باشد به طوری که هر n, m،

$$n, m \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

برهان. بر طبق تعریف، $\sum_1^\infty a_n$ همگراست اگر و تنها اگر S_n همگرا باشد و S_n همگراست اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon \; \exists N \; \forall n \; \forall m \;\; (n, m \geq N \Longrightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon)$$

و یا

$$\forall \varepsilon \; \exists N \; \forall n \; \forall m \; \left(n \geq m \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon \right) \qquad (۲۲)$$

هرگاه در (۲۲) قرار دهیم $n = m$، به دست می آوریم

$$\forall \varepsilon \; \exists N \; \forall n \; (n \geq N \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon)$$

یعنی $\lim a_n = ۰$، پس ثابت کردیم:

۵۶.۳ قضیه. هرگاه $\sum a_n$ همگرا باشد آنگاه $a_n \to ۰$.

سری های زیر واگرا هستند زیرا همه در شرط $a_n \not\to ۰$ صدق می‌کنند.

$$\sum_{۱}^{\infty} (-۱)^n \;\; , \;\; \sum_{۱}^{\infty} \frac{n}{n+۱} \;\; , \;\; \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲ \times ۴ \times \cdots \times ۲n}{۱ \times ۳ \times \cdots \times (۲n-۱)}$$

عکس قضیه‌ی ۵۴.۳ بر قرار نیست، زیرا با این که $\frac{۱}{n} \to ۰$، نشان می‌دهیم $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ واگراست. نشان می‌دهیم

$$\exists \varepsilon \; \forall N \; \exists n \; \exists m \; \left(n \geq m \geq N \; \& \; \left| \sum_{k=m}^{n} \frac{۱}{k} \right| \geq \varepsilon \right)$$

فرض کنیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$، N را دلخواه می‌گیریم، با انتخاب $m = N + ۱$ و $n = ۲N$، داریم

$$\sum_{k=N+۱}^{۲N} \frac{۱}{k} \geq \sum_{N+۱}^{۲N} \frac{۱}{۲N} = N \times \frac{۱}{۲N} = \frac{۱}{۲}$$

۵۷.۳ چند مثال

(آ) ثابت کنید $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)}$ همگراست،

$$S_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k(k+۱)} = \sum_{k=۱}^{n} \left(\frac{۱}{k} - \frac{۱}{k+۱} \right) = ۱ - \frac{۱}{n+۱}$$

پس $\lim S_n = ۱$، درنتیجه سری همگراست و $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = ۱$.

(ب) ثابت کنید $\sum_{۱}^{n} \frac{۱}{n^۲}$ همگراست. چون $S_n = \sum_{۱}^{n} \frac{۱}{k^۲}$ صعودی است. ثابت می‌کنیم از بالا کراندار است.

$$\begin{aligned} S_n &= ۱ + \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k^۲} \\ &\leq ۱ + \sum_{k=۲}^{n} \frac{۱}{k(k-۱)} \\ &= ۱ + \sum_{k=۲}^{n} \left(\frac{۱}{k-۱} - \frac{۱}{k} \right) \\ &= ۱ + ۱ - \frac{۱}{n} \\ &= ۲ - \frac{۱}{n} < ۲ \end{aligned}$$

پس S_n از بالا محدود است در نتیجه همگراست.

هرگاه $a_n \geq ۰$ آنگاه $S_n = \sum_{۱}^{n} a_n$، صعودی است پس برای اثبات همگرائی، کافیست نشان دهیم کراندار است. مثال دیگری از یک سری می‌زنیم که مولّد آن همواره مثبت نباشد.

(پ) ثابت می‌کنیم $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ همگراست

$$S_n = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$$

S_n نه صعودی است و نه نزولی. امّا زیردنباله‌ی زوج آن یعنی

$$\begin{aligned} S_{۲n} &= ۱ - \tfrac{۱}{۲} + \tfrac{۱}{۳} - \tfrac{۱}{۴} + \cdots + \tfrac{۱}{۲n-۱} - \tfrac{۱}{۲n} \\ &= (۱ - \tfrac{۱}{۲}) + (\tfrac{۱}{۳} - \tfrac{۱}{۴}) + \cdots + (\tfrac{۱}{۲n-۱} - \tfrac{۱}{۲n}) \end{aligned}$$

صعودی است زیرا $S_{۲n+۲} = S_{۲n} + (\frac{۱}{۲n+۱} - \frac{۱}{۲n+۲}) > S_{۲n}$ چون

$$S_{۲n} = ۱ - \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} \right) - \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} \right) - \cdots - \left(\frac{۱}{۲n-۲} - \frac{۱}{۲n-۱} \right) - \frac{۱}{۲n} < ۱$$

پس از بالا محدود است در نتیجه همگراست. فرض کنیم $\lim S_{۲n} = \alpha$،

$$S_{۲n+۱} = S_{۲n} + \frac{۱}{۲n+۱}$$

با حدگیری از طرفین، $\lim S_{۲n+۱} = \alpha + ۰ = \alpha$ پس $S_{۲n} \to \alpha$ و $S_{۲n+۱} \to \alpha$ در نتیجه $S_n \to \alpha$ یعنی $\sum \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ همگراست.

باید توجه داشت که نماد $+$ در عبارت $a_۱ + a_۲ + a_۴ + \cdots + a_n + \cdots$، عمل جمع اعداد نیست و این علامت، علامتی برای دنباله‌ی S_n است و این علامت خواص جمع را ندارد، مثلاً

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n = -۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - \cdots$$

یک سری واگراست (زیرا حد مولّد صفر نیست) در حالیکه اگر قوانین جمع معمولی را به کار بریم و جملات را دو تا دو تا جمع کنیم صفر می‌شود.

۵۸.۳ **قضیه.** فرض کنید $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$ در این صورت

(آ) $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

(ب) به ازای هر ثابت مانند c، $\sum ca_n = c\sum a_n$.

برهان. قرار دهید $A_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$ و $B_n = \sum_{۱}^{n} b_k$، در این صورت

$$\sum_{k=۱}^{n}(a_k + b_n) = A_n + B_n \to A + B$$

$$\sum_{۱}^{n} ca_n = cA_n \to cA$$

هرگاه a_n دنباله‌ای باشد که $a_n \to \alpha$، آنگاه $|a_n| \to \alpha$. عکس قضیه ممکن است برقرار نباشد، امّا در سری ها داریم:

۵۹.۳ **قضیه.** هرگاه $\sum|a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum a_n$ همگراست و عکس قضیه برقرار نیست (مثال پ ۵۷.۳)

برهان. $\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم، چون $\sum|a_n|$ همگراست پس در شرط کوشی صدق می‌کند یعنی $N_۰$ی هست که به ازای هر m, n، اگر $n, m \geq N_۰$، آنگاه $\sum_{k=m}^{n}|a_k| < \varepsilon$. حال به ازای هر $m, n \geq N_۰$،

$$|\sum_{m}^{n} a_k| \leq \sum_{m}^{n}|a_k| < \varepsilon$$

از مهمترین آزمون های سری ها، مقایسه‌ی یک سری با یک سری معلوم است که به شرح زیر بیان می‌کنیم

۶۰.۳ **قضیه.** (آزمون مقایسه)

(آ) فرض کنید Nی باشد که به ازای هر n، اگر $n \geq N$ آنگاه $|a_n| \leq b_n$، در این صورت اگر $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum |a_n|$ نیز همگراست.

(ب) فرض کنید Nی باشد که به ازای هر n، اگر $n \geq N$ آنگاه $\circ \leq c_n \leq d_n$، در این صورت اگر $\sum c_n$ واگرا باشد $\sum d_n$ نیز واگراست.

برهان.

(آ) چون $\sum b_n$ همگراست پس در شرط کوشی صدق می‌کند از نامساوی

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} b_n$$

نتیجه می‌گیریم که $\sum |a_n|$ نیز در شرط کوشی صدق می‌کند بنا بر این $\sum_{۱}^{\infty} |a_n|$ و $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ هر دو همگرا هستند.

(ب) اگر $\sum d_n$ همگرا باشد (خلف) بنا بر (آ) باید $\sum c_n$ نیز همگرا باشد که نیست.

نتیجه‌ای از آزمون مقایسه، که به آزمون مقایسه‌ی حدّی معروف است:

۶۱.۳ قضیه. فرض کنیم $\circ \leq a_n$ و $\circ < b_n$ و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$، در این صورت

(آ) اگر $\circ < \alpha < \infty$، آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همرفتارند. (یعنی هر دو همگرا یا هر دو واگرایند)

(ب) اگر $\alpha = \circ$، آنگاه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum a_n$ نیز همگراست.

(پ) اگر $\alpha = \infty$، آنگاه اگر $\sum a_n$ همگرا باشد $\sum b_n$ نیز همگراست.

برهان.

(آ) چون $\frac{a_n}{b_n} \to \alpha$ پس Nی هست که به ازای هر n اگر $n \geq N$، آنگاه

$$\alpha - \frac{\alpha}{۲} < \frac{a_n}{b_n} < \alpha + \frac{\alpha}{۲}$$

و یا

$$\frac{۱}{۲}\alpha b_n < a_n < \frac{۳}{۲}\alpha b_n$$

حال بنا بر مقایسه، حکم برقرار است.

(ب) $\frac{a_n}{b_n} \to ۰$ پس Nی هست که $n \geq N$ آنگاه $\frac{a_n}{b_n} \leq ۱$ و یا $a_n \leq b_n$ در نتیجه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ نیز همگراست.

(پ) رابطه‌ی $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$ نتیجه می‌دهد که

$$\exists N \, \forall n \, (n \geq N \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq ۱ \Longrightarrow a_n \geq b_n)$$

پس اگر $\sum a_n$ همگرا باشد. بنا به آزمون مقایسه، $\sum b_n$، نیز همگراست.

۶۲.۳ مثال.

۱) فرض کنید $a_n \geq ۰$ و $\sum a_n$ همگرا باشد. نشان دهید سری های $\sum \sin a_n$، $\sum \tan a_n$، $\sum \frac{a_n}{۱+a_n}$ همگرا هستند.

حل: چون $\sum a_n$ همگرا ست پس $a_k \to ۰$، درنتیجه

$$\lim \frac{\sin a_n}{a_n} = \lim \frac{\tan a_n}{a_n} = \lim \frac{\frac{a_n}{۱+a_n}}{a_n} = ۱$$

پس بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدّی هر سه همگرایند.

۲) فرض کنید $a_n > ۰$ و $\sum a_n$ واگرا باشد. نشان دهید سری های $\sum \frac{a_n}{۱+a_n}$، $\sum \ln(۱ + a_n)$ هر دو واگرا هستند.

حل: دو حالت ممکن است اتفاق افتد

(آ) $a_n \to ۰$ (ب) $a_n \not\to ۰$

(آ) هرگاه $a_n \to ۰$، آنگاه

$$\lim \frac{\frac{a_n}{۱+a_n}}{a_n} = \frac{\ln(۱ + a_n)}{a_n} = ۱$$

پس بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدّی، هر دو سری با $\sum a_n$ همرفتارند پس واگرا هستند.

(ب) هرگاه $a_n \not\to ۰$، آنگاه

$$\ln(۱ + a_n) \not\to ۰ \quad , \quad \frac{a_n}{۱ + a_n} \not\to ۰$$

پس هر دو سری واگرا هستند.

۳) چون $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست، پس بنا بر آزمون مقایسه‌ی حدّی سری های زیر واگرا هستند.

$$\sum_{۱}^{\infty} \sin \frac{۱}{n}, \quad \sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n \sqrt[۳]{n}}, \quad \sum_{۱}^{\infty} \tan \frac{۱}{n}, \quad \sum_{۱}^{\infty} \ln \left(۱ + \frac{۱}{n} \right)$$

تمرین ۱. فرض کنید $a_n > ۰$ و $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. درباره‌ی سری های زیر چه می‌توان گفت؟

$$\sum_{۱}^{\infty} \ln a_n \qquad \sum_{۱}^{\infty} \ln(۱ - a_n) \quad (۰ < a_n < ۱)$$

$$\sum_{۱}^{\infty} a_n^۲ \qquad \sum_{۱}^{\infty} \frac{a_n}{۱ - a_n} \quad (a_n \neq ۱)$$

$$\sum_{۱}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \qquad \sum_{۱}^{\infty} \sqrt{a_n}$$

$$\sum_{۱}^{\infty} a_{n+۱} \qquad \sum_{n=m}^{\infty} a_n \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\sum_{۱}^{\infty} a_{۲n} \qquad \sum_{۱}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+۱}}$$

$$\sum_{۱}^{\infty} a_{۲n-۱} \qquad \sum_{۲}^{\infty} \frac{n^۲ a_n}{n^۲ - \sqrt{n}}$$

$$\sum_{۱}^{\infty} a_n \sin n \qquad \sum_{۱}^{\infty} \frac{a_n}{۱ + n^۲ a_n}$$

$$\sum_{۱}^{\infty} \frac{a_n}{۱ + n^{\alpha} a_n} \quad (\alpha > ۱) \qquad \sum_{۱}^{\infty} a_n^{\alpha} \quad (\alpha \text{ ثابت})$$

تمرین ۲. فرض کنید $a_n > ۰$ و $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ واگرا باشد. درباره‌ی سری های مذکور در تمرین ۱ چه می‌توان گفت؟

۶۳.۳ **تعریف.** سری $\sum_{۰}^{\infty} x^n$ را که در آن x عدد مختلط ثابتی باشد، سری هندسی گویند.

۶۴.۳ **قضیه.**

(آ) اگر $|x| < ۱$، آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$ همگراست.

(ب) اگر $|x| \geq ۱$، آنگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} x^n$ واگراست.

برهان. با فرض $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$. هرگاه $x = 1$، آنگاه $S_n = n + 1$ پس $\lim S_n = \infty$ یعنی سری واگراست. فرض کنیم $x \neq 1$، در این صورت

$$S_n - xS_n = 1 - x^{n+1} \Longrightarrow S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

حال اگر $|x| < 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$ پس $\lim S_n = \frac{1}{1-x}$ و اگر $|x| > 1$، آنگاه x^{n+1} حد ندارد پس S_n حد ندارد یعنی واگراست.

خلاصه اگر $|x| < 1$، آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$

اگر مولّد سری نزولی باشد آزمون مفیدی به نام به آزمون تراکم کوشی موجود است.

آزمون تراکم

۶۵.۳ قضیه. فرض کنیم دنباله‌ی $\{a_n\}_1$ نزولی باشد و $a_n \geq 0$، در این صورت $\sum_1^\infty a_n$ و $\sum_0^\infty 2^n a_{2^n}$ همرفتارند.

برهان. فرض کنید $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ و $t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$ چون $a_n \geq 0$، پس S_n و t_n هر دو صعودی هستند.

فرض کنیم t_n همگرا باشد. ثابت می‌کنیم S_n نیز همگراست. n را دلخواه در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
n &< 2^{n+1} - 1 \Longrightarrow S_n \leq S_{2^{n+1}-1} \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \\
&= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) \\
&\quad + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\
&\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\
&= t_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}
\end{aligned}$$

پس S_n از بالا محدود است در نتیجه همگراست.

حال فرض کنیم S_n همگرا باشد. ثابت می‌کنیم t_n نیز همگراست.

$$\begin{aligned}
S_{2^n} &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots + a_{2^n} \\
&= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) \\
&\quad + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\
&\geq \tfrac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{15} + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n} = \tfrac{1}{2} t_n
\end{aligned}$$

پس به ازای هر n، a_n، $t_n \le ۲S_{۲^n} \le ۲\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$، در نتیجه t_n نیز کراندار است پس همگراست.

به طور کلی اگر p عدد طبیعی دلخواهی باشد هرگاه $a_n \ge ۰$، نزولی باشد آنگاه $\sum_{۰}^{\infty} p^n a_{p^n}$، $\sum_{۱}^{\infty} a^n$ همرفتار است. قضیه‌ی فوق حالت خاصی از این قضیه است.

قبلاً ثابت کردیم $\sum \frac{۱}{n}$ واگرا و $\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست. به عنوان کاربردی از قضیه‌ی قبل ثابت می‌کنیم

۶۶.۳ قضیه.

(آ) اگر $p > ۱$، آنگاه $\sum \frac{۱}{n^p}$ همگراست.

(ب) اگر $p \le ۱$، آنگاه $\sum \frac{۱}{n^p}$ واگراست.

برهان. در صورتی که $p \le ۰$، $\frac{۱}{n^p} \not\to ۰$، پس $\sum \frac{۱}{n^p}$ واگراست. فرض کنید $p > ۰$، لذا $\frac{۱}{n^p}$ نزولی و نامنفی است پس سری $\sum \frac{۱}{n^p}$ با سری زیر همرفتار است.

$$\sum_{۰}^{\infty} ۲^n \times \frac{۱}{(۲^n)^p} = \sum_{۰}^{\infty} (\frac{۱}{۲^{p-۱}})^n$$

و سری فوق، سری هندسی است که

(آ) همگراست اگر $p > ۱$.

(ب) واگراست اگر $p \le ۱$.

۶۷.۳ قضیه. سری $\sum_{۲}^{\infty} \frac{۱}{n \ln^p n}$

(آ) همگراست اگر $p > ۱$.

(ب) واگراست اگر $p \le ۱$.

برهان. با توجه به آزمون تراکم کوشی با سری زیر همرفتار است.

$$\sum_{۱}^{\infty} ۲^n \times \frac{۱}{۲^n (\ln ۲^n)^p} = \frac{۱}{\ln^p ۲} \sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n^p}$$

حال، حکم از قضیه‌ی ۳ نتیجه می‌شود.

تمرین ۱. رفتار $\sum \frac{۱}{n \ln(\ln \ln n)^p}$ را بررسی کنید.

تمرین ۲. با استفاده از آزمون تراکم نشان دهید سری $\sum \frac{۱}{n(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n})}$ واگراست.

۶۸.۳ قضیه. (آزمون ریشه) فرض کنید $\alpha = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. در این صورت

(آ) سری $\sum |a_n|$ همگراست اگر $\alpha < ۱$.

(ب) سری $\sum a_n$ واگراست اگر $\alpha > ۱$.

(پ) در حالت $\alpha = ۱$ آزمون بی نتیجه است. یعنی ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

برهان (آ) فرض کنیم $\alpha < ۱$، عدد β را چنین می‌گیریم $\alpha < \beta < ۱$، بنا بر خاصیت مشخصه‌ی حد بالا، Nای هست که به ازای هر n،

$$(n \geq N \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \beta \Longrightarrow |a_n| \leq \beta^n)$$

و چون $\sum \beta^n$ (هندسی) همگراست پس بنا بر مقایسه، $\sum |a_n|$ نیز همگراست.

(ب) هرگاه $\sum a_n$ همگرا باشد (خلف)، آنگاه $\lim a_n = ۰$، پس Nای هست که

$$\forall n \ (n \geq N \Longrightarrow |a_n| < ۱ \Longrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq ۱)$$

از طرفین حد بالا می‌گیریم. پس $\alpha \leq ۱$، و این خلاف فرض است در نتیجه $\sum a_n$ واگراست.

برای اثبات (پ) سری های $\sum \frac{۱}{n}$ و $\sum \frac{۱}{n^۲}$ را در نظر بگیرید که برای هر دو $\alpha = ۱$، در حالی که یکی همگرا و دیگری واگراست.

مثال. $\sum \frac{n}{۲^n}$ همگراست زیرا $\alpha = \limsup \sqrt[n]{\frac{n}{۲^n}} = \frac{۱}{۲}$.

تمرین ۱. فرض کنید $p > ۱$، نشان دهید سری $\sum \frac{\ln^q n}{n^p}$ همگراست.

(راهنمایی: ابتدا آزمون تراکم، سپس آزمون ریشه را به کار برید)

تمرین ۲. فرض کنید $a > ۱$، نشان دهید $\sum n^p a^{-n}$ همگراست.

۶۹.۳ قضیه. (آزمون نسبت) فرض کنید $\alpha = \limsup \frac{|a_{n+۱}|}{|a_n|}$ و $\beta = \liminf \frac{a_{n+۱}}{|a_n|}$ در این صورت

(آ) اگر $\alpha < ۱$، آنگاه $\sum |a_n|$ و در نتیجه $\sum a_n$ همگراست.

(ب) اگر $\alpha \geq ۱$، حتی اگر $\alpha = \infty$، آنگاه $\sum a_n$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

(پ) اگر $\beta > ۱$، آنگاه $\sum |a_n|$ واگراست.

(ت) اگر $\beta \leq ۱$، آنگاه $\sum_۱ a_n$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

(ث) اگر

$$\exists N \ \forall n \ (n \geq N \Longrightarrow |\frac{a_{n+۱}}{a_n}| \geq ۱) \qquad (۲۳)$$

آنگاه $\sum |a_n|$ و $\sum a_n$ هر دو واگرا هستند.

برهان (آ) فرض کنید $\alpha < ۱$، پس $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < ۱$ (قضیه‌ی ۳۲.۳) لذا حکم از آزمون ریشه به دست آید.

برهان (پ) فرض کنید $\beta > ۱$، پس $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > ۱$، لذا حکم از آزمون ریشه به دست آید

برهان (ث) رابطه‌ی (۲۳) ایجاب می‌کند که $|a_n| \not\to ۰$، پس $a_n \not\to ۰$.

در نتیجه $\sum |a_n|$ و $\sum a_n$ هر دو واگرایند (برای کاربردی از(ث) به۸۱.۳ توجه کنید)

قسمت های (ب) و (ت) را با ارائه‌ی سری های مناسب نشان خواهیم داد.

۷۰.۳ چند مثال

مثال ۱. می‌دانیم $\sum \frac{۱}{n}$ واگراست در حالی که $\alpha = ۱$، $\beta = ۱$.

می‌دانیم $\sum \frac{۱}{n^۲}$ همگراست در حالی که $\alpha = ۱$، $\beta = ۱$.

مثال ۲. فرض کنید $x > ۱$. دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$a_n = \begin{cases} \frac{۱}{n}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{x}{n}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \quad , \quad b_n = \begin{cases} \frac{۱}{n^۲}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{x}{n^۲}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

در این صورت، $\limsup \frac{b_{n+۱}}{b_n} = x$ در حالی که $\limsup \frac{a_{n+۱}}{a_n}$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا[۱] است. توجه کنید $\liminf \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \liminf \frac{b_{n+۱}}{b_n} = \frac{۱}{x} < ۱$

مثال ۳. دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_n = \begin{cases} \frac{۱}{۲^n}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{۱}{۳^n}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \quad , \quad b_n = n!$$

$b_n \not\to ۰$ پس $\sum b_n$ واگراست و

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{۱}{۲}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{۱}{۳}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \quad \Longrightarrow \limsup \sqrt[n]{a_n} = \frac{۱}{۲} < ۱$$

پس $\sum a_n$ همگراست امّا

[۱] فرض کنید $S_n = \sum_{k=۱}^{n} a_n$، در این صورت

$$S_{۲n} = \sum_{k=۱}^{۲n} a_k > a_۲ + a_۴ + \cdots + a_{۲n} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n} \to \infty$$

پس $\sum a_n$ واگراست.

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \begin{cases} (\frac{۲}{۳})^n \times \frac{۱}{۳}, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ (\frac{۳}{۲})^n \times \frac{۱}{۳}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \limsup \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \infty$$

در مثال ۳ دیدیم که آزمون ریشه‌ی قوی تر از آزمون نسبت است و این امر در صورتی اتفاق می‌افتد که حد $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ موجود نباشد. در صورتی که $\lim \frac{a_{n+۱}}{a_n} = \alpha$ آنگاه بنا بر قضیه‌ی ۳۳.۳، $\lim \sqrt[n]{a_n} = \alpha$، پس هر دو آزمون به یک نتیجه می‌رسند و هر دو در حالت $\alpha = ۱$، بی نتیجه هستند. در این حالت آزمون های رابه و گاوس می‌توانند مفید واقع باشند.

۷۱.۳ قضیه. (آزمون رابه) فرض کنید $a_n > ۰$ و $l = \lim n(۱ - \frac{a_{n+۱}}{a_n})$، در این صورت

(آ) اگر $l > ۱$، آنگاه $\sum a_n$ همگراست

(ب) اگر $l < ۱$، آنگاه $\sum a_n$ واگراست

(پ) اگر $l = ۱$، آنگاه آزمون بی نتیجه است.

برهان (آ). فرض کنید $l > ۱$، عدد β را چنین می‌گیریم $۱ < \beta < l$، چون $l = \lim n(۱ - \frac{a_{n+۱}}{a_n})$ پس عددی مانند m موجود است به طوری که

$$\forall k\,(k \geq m \Longrightarrow k(۱ - \tfrac{a_{k+۱}}{a_k}) > \beta)$$

و یا

$$\begin{aligned} &\beta a_k < k a_k - k a_{k+۱} \Longrightarrow \\ &(\beta - ۱)a_k < (k-۱)a_k - k a_{k+۱} \Longrightarrow \\ &\textstyle\sum_m^n (\beta - ۱)a_k < (m-۱)a_m - n a_{n+۱} < (m-۱)a_m \Longrightarrow \\ &\textstyle\sum_۱^n a_k < \frac{۱}{\beta - ۱}(m-۱)a_m + \sum_۱^{m-۱} a_k \end{aligned}$$

چون m ثابت است. پس $\sum a_n$ صعودی و از بالا محدود است در نتیجه همگراست

برهان (ب). فرض کنید $l < ۱$، در نتیجه عددی طبیعی مانند N موجود است به طوری که

$$\forall k\,(k \geq N \Longrightarrow k(۱ - \frac{a_{k+۱}}{a_k}) < ۱)$$

و یا

$$\forall k\,(k \geq N \Longrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{k-1}{k}) \Longrightarrow$$

$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} > \prod_{k=N}^{n-1} \frac{k-1}{k} \Longrightarrow$$

$$\frac{a_n}{a_N} > \frac{N-1}{n-1} \Longrightarrow a_n > a_N(N-1)\frac{1}{n-1}$$

چون سری $\sum_N^\infty \frac{1}{n-1}$ واگراست. پس حکم از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود.

برهان (پ). در حالت $l = 1$ سری های $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ و $\sum_2^\infty \frac{1}{n\ln^2 n}$ را در نظر بگیرید. یکی همگرا و دیگری واگراست در حالی که برای هر دو سری داریم

$$\lim n(1 - \tfrac{a_{n+1}}{a_n}) = 1$$

۷۲.۳ مثال. فرض کنید $a_n = \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$، چون $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$ پس $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ و در نتیجه $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$، پس آزمون های ریشه و نسبت توان پاسخ گویی درباره‌ی سری $\sum a_n$ را ندارند، از آزمون رابه استفاده می‌کنیم

$$n(1 - \tfrac{a_{n+1}}{a_n}) = \tfrac{n}{2n+2} \to \tfrac{1}{2}$$

پس سری $\sum_1^\infty a_n$ واگراست.

تمرین ۱. بدون استفاده از آزمون رابه، نشان دهید سری فوق واگراست.

تمرین ۲. فرض کنید $\alpha \neq 1$، به کمک آزمون رابه نشان دهید

(آ) اگر $\alpha > 1$، سری $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ همگراست.

(ب) اگر $\alpha < 1$، سری $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ واگراست.

در حالتی که $\alpha = 1$، آزمون رابه بی نتیجه است.

تمرین ۳. فرض کنید $\alpha \neq 2$، رفتار سری $\sum(\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)})^\alpha$ رابررسی کنید.

۷۳.۳ قضیه. (آزمون گاوس) فرض کنید $\sum a_n$ یک سری با جملات مثبت باشد و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^s}$$

که در آن $s > 1$ و $\{\beta_n\}$ دنباله‌ای کراندار است. در این صورت

(آ) اگر $\alpha > 1$، آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

(ب) اگر $\alpha \leq 1$، آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

برهان. در حالت $\alpha \neq ۱$، از آزمون رابه استفاده می‌کنیم

$n(۱ - \frac{a_{n+۱}}{a_n}) = \alpha + \frac{\beta_n}{n^{s-۱}} \Longrightarrow$
$\lim_{n\to\alpha} n(۱ - \frac{a_{n+۱}}{a_n}) = \alpha$

بنا بر آزمون رابه، اگر $\alpha > ۱$، همگرا و اگر $\alpha < ۱$ واگراست.
حال فرض کنید $\alpha = ۱$، در این صورت با انتخاب $b_n = \frac{۱}{(n-۱)\ln(n-۱)}$، $(n > ۲)$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+۱}}{a_n} - \frac{b_{n+۱}}{b_n} &= \frac{n-۱}{n} - \frac{(n-۱)\ln(n-۱)}{n\ln n} + \frac{\beta_n}{n^s} \\
&= \frac{n-۱}{n} \times \frac{\ln n - \ln(n-۱)}{\ln n} + \frac{\beta_n}{n^s} \\
&= \frac{۱}{n\ln n} \times \ln(۱ + \frac{۱}{n-۱})^{n-۱} + \frac{\beta_n}{n^s} \\
&= \frac{۱}{n^s}\left[\frac{n^{s-۱}}{\ln n} \times \ln(۱ + \frac{۱}{n-۱})^{n-۱} + \beta_n\right]
\end{aligned}$$

چون $\ln(۱ + \frac{۱}{n-۱})^{n-۱} \to ۱$ و $\frac{n^{s-۱}}{\ln n} \to +\infty$ و β_n کراندار است پس عبارت داخل کروشه مثبت است، بنا بر این

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} > \frac{b_{n+۱}}{b_n} \Longrightarrow$$

$$\prod_{k=۳}^{n-۱} \frac{a_{k+۱}}{a_n} > \prod_{k=۳}^{n-۱} \frac{b_{k+۱}}{b_k} \Longrightarrow \frac{a_n}{a_۳} > \frac{b_n}{b_۳}$$

$$\Longrightarrow a_n > \frac{a_۳}{b_۳} \cdot b_n$$

چون سری $\sum_۳^\infty b_n$ واگراست، حکم از مقایسه نتیجه می‌شود.
مثال. با استفاده از آزمون گاوس نشان دهید $\sum_۱^\infty \frac{۱}{n}$ واگراست.

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{n}{n+۱} = \frac{n+۱-۱}{n+۱} = ۱ - \frac{۱}{n+۱}$$

چون $\alpha = ۱$، پس سری واگراست.
تمرین. رفتار سری $\sum \left[\frac{۲\cdot۴\cdots۲n}{۳\cdot۵\cdots(۲n+۱)}\right]^۲$ را بررسی کنید.

آزمون هایی که تا اینجا بیان شده اند درباره‌ی سری های نامنفی و یا سری هایی می‌باشند که به طور مطلق همگرایند.

حال به قضیه‌ی مفیدی درباره‌ی سری هایی که علامت جملات آن ها ثابت نباشد مانند سری های متناوب می‌پردازیم.

۷۴.۳ قضیه. فرض کنیم $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ کراندار باشد و $b_n \geq 0$ و b_n نزولی باشد و $\lim b_n = 0$ در این صورت $\sum a_n b_n$ همگراست.

برهان. چون A_n کراندار است پس $M > 0$ای هست که $|A_n| < M \quad (n \in \mathbb{N})$
فرض کنیم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد چون $b_n \to 0$، پس Nی هست که اگر $n \geq N$، آنگاه $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. حال فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $n \geq m \geq N$،

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k| &= |\sum_{m}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k| \\
&= |\sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k| \\
&= |\sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1}| \\
&= |\sum_{k=m}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} |A_k|(b_k - b_{k+1}) + |A_n| b_n + |A_{m-1}| b_m \\
&\leq M(\sum_{m}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) + b_n + b_m) \\
&\leq M(2b_m) < M \times 2 \times \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

پس $\sum a_n b_n$ در شرط کوشی صدق کرد. یعنی همگراست.

۷۵.۳ قضیه. فرض کنیم $b_n \geq 0$ و b_n نزولی باشد و $\lim b_n = 0$. در این صورت $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ همگراست.

برهان. چون $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right. = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = A_n$ پس $|A_n| \leq 1$ در نتیجه حکم بنا بر قضیه‌ی قبل برقرار است.

۷۶.۳ تعریف. سری به صورت $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$ را که $b_n > 0$، سری متناوب

گویند. در قضیه‌ی فوق دیدیم که اگر $b_n \downarrow$ و $b_n \to 0$ آنگاه سری متناوب همگراست. فرض کنید $B = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} b_n$ و $B_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} b_k$

$$\begin{aligned} B - B_n &= (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots \\ &= (-1)^n [b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - \cdots] && (1) \\ &= (-1)^n [(b_{n+1} - b_{n+2}) + (b_{n+3} - b_{n+4}) - \cdots] && (2) \\ &= (-1)^n [b_{n+1} - (b_{n+2} - b_{n+3}) - (b_{n+4} - b_{n+5}) - \cdots] && (3) \end{aligned}$$

هر گاه فرض کنید $\theta_n = [b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - \cdots]$ آنگاه (۲) نشان می‌دهد که $0 < \theta_n$ و (۳) نشان می‌دهد که $\theta_n < b_{n+1}$. و سطر (۱) نشان می‌دهد که

$$B - B_n = (-1)^n \theta_n \Longrightarrow 0 < (-1)^n (B - B_n) < \theta_n < b_{n+1}$$
$$\Longrightarrow |B - B_n| < b_{n+1}$$

مثال. بنا بر قضیه‌ی ۷۲.۳ سری $\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \times \frac{1}{n}$ همگراست. فرض کنید $A_n = \sum_1^n (-1)^{k-1} \times \frac{1}{n}$ و $A = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \times \frac{1}{n}$، در فصل های بعدی نشان خواهیم داد که $A = \ln 2$. پس

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \times \frac{1}{n} + \cdots$$

حال اگر A_n را یک مقدار تقریبی برای $\ln 2$ انتخاب کنیم آنگاه میزان خطا و علامت خطا را مشخص کنید.
با توجه به ۷۶.۳:

(I) اگر مقدار تقریبی $\ln 2$ را برابر۱ بگیرید (A_1) آنگاه $\ln 2$ از ۱ کمتر است و میزان خطا حداکثر $\frac{1}{2}$ است.

(II) اگر مقدار تقریبی $\ln 2$ را برابر $\frac{1}{2} - 1$ بگیرید (A_2) آنگاه $\ln 2$ از $\frac{1}{2} - 1$ بیشتر است و میزان خطا حداکثر $\frac{1}{3}$ است.

(III) اگر مقدار تقریبی $\ln 2$ را برابر$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1$ بگیرید (A_3) آنگاه $\ln 2$ از $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1$ کمتر است و میزان خطا حداکثر $\frac{1}{4}$ است.

به طریق فوق هم مقدار تقریبی و هم میزان خطا در هر مرحله‌ای مشخص است.
قضیه‌ی ۷۲.۳ را به صورت زیر می‌توان ثابت کرد.
با فرض $S_n = \sum_1^n (-1)^{n-1} b_n$، نشان می‌دهیم S_n همگراست.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2n-1} - b_{2n}) = \\ &= b_1 - (b_2 - b3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n} \end{aligned}$$

مقدار داخل هر پرانتز نامنفی است. سطر اول نشان می‌دهد $S_{۲n}$ صعودی است و سطر دوم نشان می‌دهد از بالا محدود به $b_۱$ است پس همگراست، چون

$$S_{۲n+۱} = S_{۲n} + b_{۲n+۱} \quad , \quad b_n \to ۰$$

پس $\lim S_{۲n+۱} = \lim S_{۲n}$، در نتیجه S_n همگراست.

مثال. سری های $\sum \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$، $\sum \frac{(-۱۰)^n}{\ln n}$ همگرایند و هیچ کدام از این سری ها به طور مطلق همگرا نیستند.

۷۷.۳ تمرین

۱) نشان دهید سری های زیر همگر هستند.
(آ) $\sum_۱^\infty \frac{\sin nx}{n}$ (ب) $\sum_۱^\infty \frac{\cos nx}{n}$

۲) تحقیق کنید سری $\sum_۱^\infty (۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n})\frac{\sin nx}{n}$ به ازای هر x همگراست.

۳) فرض کنید $\sum a_n$ همگرا و b_n دنباله‌ای یکنوا و کراندار باشد نشان دهید $\sum a_n b_n$ همگراست.

۴) فرض کنید z عدد مختلطی باشد که $z \neq ۱$ و $|z| = ۱$، ثابت کنید سری $\sum_۱^\infty \frac{z^n}{n}$ همگراست.

۵) رفتار $\sum (-۱)^n \frac{۲.۴\cdots۲n}{۳.۵\cdots(۲n+۱)}$ را بررسی کنید. [راهنمایی: با فرض $a_n = \frac{۲.۴\cdots۲n}{۳.۵\cdots(۲n+۱)}$، $a_n \downarrow$، برای اثبات $a_n \to ۰$، به $\ln a_n$ توجه کنید]

٦) رفتار سری های زیر را بررسی کنید.
(آ) $\sum \left[\frac{۱}{(n+۱)^۲} + \frac{۱}{(n+۲)^۲} + \cdots + \frac{۱}{(۲n)^۲}\right] \cos n\theta$
(ب) $\sum \left[\frac{۱}{(n+۱)^۲} + \frac{۱}{(n+۲)^۲} + \cdots + \frac{۱}{(۲n)^۲}\right] \sin^۲ n\theta$

۷) فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum_۱^\infty |b_n - b_{n+۱}|$ همگرا باشند نشان دهید $\sum_۱^\infty a_n b_n$ همگراست (مانند برهان ۷۲.۳ عمل کنید)

۸) فرض کنید a_n یک دنباله از $\mathbb{R}^k$ باشد.

تعریف همگرایی $\sum_۱^\infty a_n$ را نوشته و رابطه‌ی همگرایی آن را با مؤلفه‌های a_n مشخص کنید.

عدد e

۷۸.۳ **تعریف.** $e = \sum_{۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$.

بنا بر آزمون نسبت سری فوق همگراست پس e یک عدد مثبت است. چون

$$\begin{aligned} S_n &= ۱ + ۱ + \frac{۱}{۱\cdot۲} + \frac{۱}{۱\cdot۲\cdot۳} + \cdots + \frac{۱}{۱\cdot۲\cdots n} \\ &< ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^{۲}} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}} < ۳ \end{aligned}$$

پس $e \leq ۳$، چون S_n اکیداً صعودی است، در نتیجه $S_n < e$ عدد e را می‌توان به صورت های دیگری نیز معرفی کرد از جمله با یک حد دیگر.

۷۹.۳ **قضیه.** $\lim_{n\to\infty}(۱ + \frac{۱}{n})^n = e$.

برهان. فرض کنیم $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ و $S_n = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!}$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a_n &= (۱ + \frac{۱}{n})^n \\ &= ۱ + ۱ + \frac{n(n-۱)}{۲!}\cdot\frac{۱}{n^{۲}} + \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}\cdot\frac{۱}{n^{۳}} + \cdots \\ &\quad + \frac{n(n-۱)\cdots۲\cdot۱}{n!}\cdots\frac{۱}{n^n} \\ &< ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} \end{aligned}$$

پس به ازای هر n، $a_n < S_n$، از طرفین حد بالا می‌گیریم

$$\limsup_{n\to\alpha} a_n \leq e \qquad (۲۴)$$

حال فرض کنید m عدد طبیعی دلخواهی باشد، به ازای هر $n \geq m$ می‌توان نوشت

$a_n \geq ۱ + ۱ + \frac{n(n-۱)}{۲!} + \cdots + \frac{n(n-۱)(n-m+۱)}{m!}\cdot\frac{۱}{n^m}$

از طرفین حد پایین می‌گیریم $(n \to \infty)$.

$$\liminf a_n \geq ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{m!} = S_m$$

پس به ازای هر m،

$S_m \leq \liminf a_n$

حال اگر $m \to \infty$، خواهیم داشت

$$e \leq \liminf a_n \qquad (۲۵)$$

پس حکم از (۲۴) و (۲۵) نتیجه می‌شود.
توجه کنید که دنباله‌ی $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ و S_n هر دو به e صعود می‌کنند امّا سرعت همگرایی S_n بیشتر از a_n است پس در مسائل مربوط به تقریب e می‌توان از S_n استفاده کرد. محاسبه‌ی زیر نشان می‌دهد میزان چقدر است.

$$\begin{aligned} ۰ &< e - S_n \\ &= \frac{۱}{(n+۱)!} + \frac{۱}{(n+۲)!} + \cdots \\ &= \frac{۱}{(n+۱)!}\left[۱ + \frac{۱}{n+۲} + \frac{۱}{(n+۲)(n+۳)} + \cdots\right] \\ &< \frac{۱}{(n+۱)!}\left[۱ + \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{(n+۱)^۲} + \cdots\right] = \frac{۱}{n.n!} \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

پس به ازای هر n،

$$۰ < e - S_n < \frac{۱}{n \cdot n!} \qquad (۲۷)$$

رابطه‌ی فوق میزان نزدیکی S_n به e را نشان می‌دهد، مثلاً اختلاف $S_{۱۰}$ با e کمتر از $\frac{۱}{۱۰^۷}$ است.
فرض کنید $e - S_n = \theta_n$ و یا $e = S_n + \theta_n$، رابطه‌ی (۲۶) نشان می‌دهند که $۰ < \theta_n < \frac{۱}{n.n!}$ و یا $۰ < \theta_n.n! < \frac{۱}{n}$. پس $\lim_{n\to\infty} \theta_n n! = ۰$ رابطه‌ی (۲۶) نشان می‌دهد.

$$\lim_{n\to\infty} (n+۱)!\theta_n = ۱ \qquad (۲۸)$$

نشان دهید $\lim_{n\to\infty} \sin ۲\pi e n! = ۰$.

$$\begin{aligned} \sin ۲\pi e n! &= \sin ۲\pi(S_n + \theta_n)n! \\ &= \sin(۲\pi S_n.n! + ۲\pi\theta_n.n!) \\ &= \sin ۲\pi\theta_n.n! \end{aligned}$$

$S_n.n!$ عددی صحیح است
پس $\lim_{n\to\infty} \sin ۲\pi e n! = ۰$
تمرین. با استفاده از رابطه‌ی (۲۸) نشان دهید

$\lim_{n\to\infty} n \sin ۲\pi e n! = ۲\pi$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۷) می‌توان گنگ بودن e را ثابت کرد.

۸۰.۳ قضیه. e گنگ است.

برهان. فرض کنید e گویا باشد. پس دو عدد طبیعی مانند p و q موجودند به طوری که $e = \frac{p}{q}$، بنا بر (۲۷)

$$\begin{aligned} ۰ < e - S_q < \tfrac{۱}{q\cdot q!} \quad &\Longrightarrow ۰ < \tfrac{p}{q} - S_q < \tfrac{۱}{q\cdot q!} \\ &\Longrightarrow ۰ < \tfrac{p}{q}\cdot q! - S_q \cdot q! < \tfrac{۱}{q} \le ۱ \end{aligned}$$

$S_q.q!$ و $\frac{p}{q}.q!$ هر دو اعداد صحیحی هستند. پس تفاضل آن ها عددی صحیح است امّا عدد صحیح بین صفر و یک موجود نمی‌باشد. پس به تناقض رسیدیم.

۸۱.۳ مثال. رفتار سری $\sum_{۱}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ را بررسی کنید.

فرض کنید $a_n = \frac{n!e^n}{n^n}$. آزمون نسبت را به کار می‌بندیم

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{n^n e}{(۱+n)^n} = \frac{e}{(۱+\frac{۱}{n})^n}$$

ملاحظه می‌کنیم $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = ۱$ پس قسمت های (آ)، (ب)، (پ)، (ت) از قضیه‌ی ۶۹.۳ توان پاسخ گویی را ندارند حتی آزمون ریشه نیز بی نتیجه است امّا قسمت (ث) از قضیه‌ی ۶۹.۳ را به کار می‌بندیم:

چون $(۱ + \frac{۱}{n})^n$ یک دنباله‌ی صعودی است پس $(۱ + \frac{۱}{n})^n < e$، در نتیجه $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \ge ۱$، پس سری $\sum a_n$ واگراست چون $a_n \not\to ۰$ پس $\sum (-۱)^n a_n$ نیز واگراست.

سری های توانی

۸۲.۳ تعریف. سری به صورت $\sum_{۰}^{\infty} a_n z^n$ یا $\sum_{۰}^{\infty} a_n (z - z_۰)^n$ را که در آن $\{a_n\}_{۱}^{\infty}$ دنباله‌ای مختلط و z متغیری مختلط است سری توانی نامیده می‌شود.

مانند سری های

$$\sum_{۱}^{\infty} \tfrac{z^n}{n} \quad , \quad \sum_{۰}^{\infty} n! z^n \quad , \quad \sum_{۰}^{\infty} \tfrac{z^n}{n!} \quad , \quad \sum_{۰}^{\infty} ۲^n (z-i)^n$$

رفتار سری علاوه بر a_n به مقدار z نیز بستگی دارد. در قضیه‌ی زیر برای هر سری توانی دایره‌ای به نام دایره‌ی همگرایی معرفی می‌کنیم که هرگاه z در درون دایره قرار گیرد سری همگرا خواهد شد. در صورتی که a_n دنباله‌ی حقیقی و z متغیری حقیقی باشد به جای دایره همگرایی، بازه‌ی همگرایی مربوط خواهد شد برای در نظر گرفتن کلیه‌ی حالتها، صفحه‌ی مختلط را یک دایره به شعاع نامتناهی می‌گیریم.

۸۳.۳ قضیه. فرض کنید

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \quad , \quad R = \tfrac{۱}{\alpha}$$

(اگر $R = \infty$، $\alpha = 0$ و اگر $R = 0$، $\alpha = \infty$) در این صورت
(آ) اگر $|z| < R$، آنگاه سری $\sum a_n z^n$ به طور مطلق همگراست.

(ب) اگر $|z| > R$، آنگاه سری $\sum a_n z^n$ واگراست.

(پ) در صورتی که $|z| = R$، آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد.

در حالت $R = 0$، سری فقط به ازای $z = 0$ همگراست.
برهان. آزمون ریشه را مورد سری $\sum_0^\infty a_n z^n$ به کار می‌بندیم،
$$\limsup \sqrt{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt{|a_n|} = \frac{|z|}{R}$$
R را شعاع همگرایی سری فوق گویند.
در صورتی که $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \alpha$ $(0 \le \alpha \le \infty)$، آنگاه چون $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$ پس $R = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$.
شعاع همگرائی $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n} x^n$ را پیدا کنید. در ۸۱.۳ ثابت شد $\sum_1^\infty \frac{n! e^n}{n^n}$ واگراست.

۸۴.۳ تمرین.

۱) شعاع همگرائی سری های زیر را پیدا کنید.

(آ) $\sum_0^\infty n^n x^n$

(ب) $\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}$

(پ) $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$

(ت) $\sum_0^\infty \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}(1+x)^n \quad (p \in \mathbb{R})$

(ث) $\sum \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)} x^n$

۲) فرض کنید سری توان حقیقی $\sum_0^\infty a_n x^n$ به ازای $|x| < 4$ همگرا باشد، سری های زیر به ازای چه مقادیری از x همگرایند.

$$\sum_0^\infty a_n x^{2n}, \quad \sum_0^\infty a_n x^{2n+1}, \quad \sum_0^\infty a_n x^{\frac{n}{2}}$$
$$\sum_0^\infty n a_n x^n, \quad \sum_0^\infty \frac{a_n}{2^n} x^n, \quad \sum_0^\infty n^2 a_n (x-1)^n$$

۳) فرض کنید $\sum_0^\infty c_n$ همگرا باشد نشان دهید شعاع همگرایی $\sum c_n x^n$ حداقل برابر یک است.

۴) فرض کنید سری $\sum_{۰}^{\infty} a_n x^n$ به ازای $x = x_۱$ همگرا باشد. نشان دهید شعاع همگرایی حداقل برابر $|x_۱|$ است.

بررسی رفتار سری توان در روی دایره همگرایی معمولاً ساده نیست، ولی در حالت خاص قضیه‌ی زیر مفید است.

۸۵.۳ قضیه. فرض کنیم شعاع سری توان $\sum c_n x^n$ یک باشد، $c_n \geq ۰$ و c_n نزولی باشد و $\lim c_n = ۰$، در این صورت $\sum c_n x^n$ به ازای هر x اگر $|x| = ۱$، به جزء احتمالاً $x = ۱$، همگراست.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۷۴.۳،

$$A_n = \sum_{k=۰}^{n} x^k = |\frac{۱ - x^n}{۱ - x}| \leq \frac{۲}{|۱ - x|}$$

یعنی A_n کراندار است در نتیجه $\sum c_n x^n$ همگراست.

چون شعاع همگرایی $\sum \frac{x^n}{n}$، یک است پس به ازاء هر عدد مختلط مانند $x = \cos\theta + i\sin\theta$، سری $\sum_{۱}^{\infty} \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{n}$ همگراست چون

$$\sum_{۱}^{\infty} \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{n} = \sum_{۱}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i\sum_{۱}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

پس هر دو سری $\sum_{۱}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ و $\sum_{۱}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$ هر دو همگرایند.

ضرب سری‌ها

ضرب دو سری $\sum_{۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{۰}^{\infty} b_n$ را یک سری مانند $\sum_{k=o}^{\infty} c_n$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$c_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k} \quad .$$

سری $\sum_{۰}^{\infty} c_n$ را ضرب کوشی سری های فوق گویند.

می‌توان این ضرب را چنین به دست آورد. دو سری توان $\sum_{۰}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{۰}^{\infty} b_n x^n$ را مانند دو چند جمله‌ای در یکدیگر ضرب می‌کنیم و بعد جملات هم توان را دسته‌بندی می‌کنیم یعنی

$$(\sum_{۰}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{۰}^{\infty} b_n x^n) \quad = \quad (a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + \cdots)(b_۰ + b_۱ x + \cdots)$$

$$\begin{aligned} &= a_۰b_۰ + (a_۰b_۱ + a_۱b_۰)x + (a_۰b_۲ + a_۱b_۱ + a_۲b_۰)x^۲ + \cdots \\ &= c_۰ + c_۱x + c_۲x^۲ + \cdots \end{aligned}$$

در طرفین قرار می‌دهیم $x = ۱$، به تعریف فوق خواهیم رسید.

آیا ضرب دو سری همگرا، همگراست؟

فرض کنیم $\sum_۰^\infty c_n$ ضرب دو سری $\sum_۰^\infty a_n$ و $\sum_۰^\infty b_n$ باشد و نیز فرض کنیم

$$C_n = \sum_۰^n c_k \quad , \quad A_n = \sum_۰^n a_k \quad , \quad B_n = \sum_۰^n b_k$$

چه رابطه‌ای بین C_n و A_n و B_n وجود دارد؟ به سادگی دیده می‌شود رابطه‌ی $C_n = A_nB_n$ برقرار نیست پس انتظار نداریم که $C_n \to AB$. طی دو مثال زیر نشان می‌دهیم که حاصل ضرب دو سری همگرا ممکن است همگرا نباشد.

۸۶.۳ مثال. ۱. می‌دانیم $\sum_۰^\infty \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n+۱}}$ همگراست. حاصل ضرب آن را در خودش به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} c_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k} &= \sum_{k=۰}^{n} \frac{(-۱)^k}{\sqrt{k+۱}} \times \frac{(-۱)^{n-k}}{\sqrt{n-k+۱}} \\ &= (-۱)^n \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{\sqrt{(k+۱)(n-k+۱)}} \end{aligned}$$

و چون

$$(n-k+۱)(K+۱) = (\tfrac{n}{۲}+۱)^۲ - (\tfrac{n}{۲}-k)^۲ \le (\tfrac{n}{۲}+۱)^۲$$

$$|c_n| \ge \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{\sqrt{(\frac{n}{۲}+۱)^۲}} = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۲}{n+۲} = \frac{۲(n+۱)}{n+۲}$$

پس $c_n \not\to ۰$ در نتیجه $\sum_۰^\infty c_n$ واگراست.

مثال ۲. ضرب سری $\sum_۰^\infty \frac{(-۱)^{n+۱}}{n+۱}$ را در خودش حساب می‌کنیم

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=۰}^{n} \frac{(-۱)^{k+۱} \times (-۱)^{n-k+۱}}{(k+۱)(n-k+۱)} \\ &= (-۱)^n \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{(k+۱)(n-k+۱)} \\ &= (-۱)^n \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{n+۲}\left(\frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{n-k+۱}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-۱)^n}{n+۲}\left(\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{k+۱}+\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{n-k+۱}\right)\\ &= (-۱)^n\times\frac{۲}{n+۲}\left(\sum_{k=۰}^{n}\frac{۱}{k+۱}\right)\\ &= \frac{(-۱)^n\times ۲)}{n+۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n+۱}\right). \end{aligned}$$

در عبارت فوق از این امر که $\sum_{k=۰}^{n}a_k=\sum_{k=۰}^{n}a_{n-k}$ استفاده شد، پس ضرب آن سری در خودش عبارتست از

$\sum_{n=۰}^{\infty}c_n=۲\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۲}(۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱})$

و چون $b_n=\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱}}{n+۲}$ در شرط $b_n\geq ۰$ و $b_n\downarrow$ و $\lim_{n\to\infty}b_n=۰$ (ثابت خواهیم کرد) صدق می‌کند پس سری $\sum_{۰}^{\infty}(-۱)^nb_n$ همگراست.

۸۷.۳ قضیه. حاصل ضرب دو سری همگرا در صورتی همگراست که حداقل یکی از آنها به طور مطلق همگرا باشد.

برهان. فرض کنیم $\sum_{۰}^{\infty}a_n=A$ و $\sum_{۰}^{\infty}|a_n|=\alpha$ و $\sum_{۰}^{\infty}b_n=B$ ثابت می‌کنیم ضرب آن ها به AB همگراست. با فرض $A_n=\sum_{k=۰}^{n}a_k$ و $B_n=\sum_{k=۰}^{n}b_k$ و $\beta_n=B_n-B$ و $C_n=\sum_{k=۰}^{n}c_k$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} C_n &= c_۰+c_۱+\cdots+c_n\\ &= a_۰b_۰+(a_۰b_۱+a_۱b_۰)+(a_۰b_۲+a_۱b_۱+a_۲b_۰)\\ &\quad+\cdots+(a_۰b_n+a_۱b_{n-۱}+\cdots+a_nb_۰)\\ &= a_۰B_n+a_۱B_{n-۱}+\cdots+a_nB_۰\\ &= a_۰(B+\beta_n)+a_۱(B+\beta_{n-۱})+\cdots+a_n(B-\beta_۰)\\ &= A_nB+a_۰\beta_n+a_۱\beta_{n-۱}+\cdots+a_n\beta_۰ \end{aligned}$$

با فرض $\gamma_n=a_۰\beta_n+a_۱\beta_{n-۱}+\cdots+a_n\beta_۰$ پس $C_n=A_nB+\gamma_n$، چون $A_nB\to AB$ کافیست نشان دهیم $\gamma_n\to ۰$.

فرض کنیم $\varepsilon>۰$ دلخواه باشد، چون $\beta_n\to ۰$، پس Nی هست که به ازای هر n اگر $n\geq N$ آنگاه

$$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{\alpha}$$

γ_n را به صورت زیر دسته بندی می‌کنیم

$$\gamma_n = (a_۰\beta_n + a_۱\beta_{n-۱} + \cdots + a_{n-N}\beta_N) + (a_{n-N+۱}\beta_{N-۱} + \cdots + a_n\beta_۰)$$

پس γ_n از دو قسمت تشکیل شده است. فرض کنید قسمت اول x_n و قسمت دوم y_n باشد تعداد جملات در y_n ثابت است و چون $a_n \to ۰$، پس $y_n \to ۰$. امّا

$$|x_n| \le (\tfrac{\varepsilon}{\alpha}|a_۰| + \tfrac{\varepsilon}{\alpha}|a_۱| + \cdots + \tfrac{\varepsilon}{\alpha}|a_{n-N}|) < \tfrac{\varepsilon}{\alpha}\cdot\alpha = \varepsilon$$

حال اگر از طرفین حد بالا بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\limsup|\gamma_n| \le \varepsilon$$

و چون $\varepsilon > ۰$ دلخواه است پس $\limsup|\gamma_n| = ۰$ در نتیجه $\gamma_n \to ۰$.

این قضیه با این فرض که حداقل یکی از دو سری همگرا ست. اثبات شد امّا در مثال ۲ بخش ۸۶.۳ ملاحظه کردید که بدون این فرض هم ممکن است حاصلضرب دو سری همگرا، همگرا باشد به طور کلی قضیه‌ی زیر برقرار است.

۸۸.۳ قضیه. هرگاه $\sum a_n = A$ و $\sum b_n = B$ و $\sum c_n = C$ آنگاه $C = AB$.

درج و حذف پرانتز

۸۹.۳ تعریف. فرض کنیم $\{n_k\}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ باشد و $\sum_۱^\infty a_n$ و $\sum_۱^\infty b_n$ دو سری باشند که به صورت زیر به هم مربوط شده باشند

$$b_۱ = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{n_۱}$$

$$b_{k+۱} = a_{n_k+۱} + a_{n_k+۲} + \cdots + a_{n_{k+۱}} \qquad (k = ۱, ۲, \ldots)$$

در این صورت گوئیم $\sum b_n$ از $\sum a_n$ با درج پرانتز و $\sum a_n$ از b_n با حذف پرانتزها به دست آمده است.

۹۰.۳ قضیه. هرگاه $\sum a_n$ همگرا به S باشد هر سری مانند $\sum b_n$ که از $\sum a_n$ با درج پرانتز به دست آمده باشد همگرا به S است.

برهان. با فرض $S_n = \sum_{k=۱}^n a_k$ و $t_n = \sum_{k=۱}^n b_k$ با توجه به تعریف درج پرانتز معلوم می‌شود $t_k = s_{n_k}$ یعنی زیردنباله‌ی S_n است پس حکم برقرار است.

ولی عکس قضیه برقرار نیست، زیرا مثلاً $\sum_{n=۱}^\infty (-۱)^n$ واگراست در حالی که به ازای $n_k = ۲k$ سری $\sum_۱^\infty b_n$ عبارتست از

$b_۱ = a_۱ + a_۲ = -۱ + ۱ = ۰$

$b_{k+۱} = a_{۲k+۱} + \cdots + a_{۲(k+۱)} = a_{۲k+۱} + a_{۲k+۲} = (-۱) + ۱ = ۰$

پس $\sum b_n$ همگراست.

خلاصه، اگر یک سری همگرا باشد هر درج پرانتز در آن مجاز است و تغییری در مقدار سری ایجاد نمی‌شود.

تجدید آرایش در سری

۹۱.۳ **تعریف.** فرض کنیم $\{K_n\}$ دنباله‌ای یک به یک و پوشا از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ باشد در این صورت $\sum a_{k_n}$ را یک تجدید آرایش در $\sum_۱^\infty a_n$ گویند. به عبارت دیگر اگر $\sum a_n$ یک سری و $b_n = a_{k_n}$ آنگاه $\sum b_n$ را یک تجدید آرایش $\sum a_n$ خوانند چون $a_n = b_{k_n^{-۱}}$ پس $\sum a_n$ نیز یک تجدید آرایش $\sum b_n$ است.

مثال. یک تجدید آرایش $\sum_۱^\infty \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ عبارت است از

$$۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۱} - \frac{۱}{۶} + \cdots$$

که در آن همواره دو جمله‌ی مثبت و یک جمله‌ی منفی قرار دارد.

اینک این سئوال پیش می‌آید که آیا این تجدید آرایش همگراست؟ اگر هست مقدارش برابر مقدار سری اولی است؟ فرض کنیم $S_n = \sum_{k=۱}^n \frac{(-۱)^{k-۱}}{k}$، ثابت کردیم که S_n همگراست. چون

$$\begin{aligned} S_{۲n+۱} &= ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲n+۱} = \\ &= ۱ - (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}) - (\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵}) - \cdots - (\frac{۱}{۲n} - \frac{۱}{۲n+۱}) \\ &< ۱ - (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}) = \frac{۵}{۶} \end{aligned}$$

پس مقدار سری $\sum_۱^\infty \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ کمتر از $\frac{۵}{۶}$ است در حالی که با فرض S'_n مجموع جزئی سری دوم چون به ازای هر $k \geq ۱$، $\frac{۱}{۴k-۳} + \frac{۱}{۴k-۱} - \frac{۱}{۲k} > ۰$ پس $S'_{۳n}$ صعودی اکید است. چون $S'_۳ = \frac{۵}{۶}$ پس در صورت همگرا بودن، قطعاً مقدارش با مقدار سری اول متفاوت است (ثابت کنید سری دوم همگراست)

۹۲.۳ **قضیه.** (ریمن) فرض کنیم $\sum c_n$ به طور مشروط همگرا باشد، در این صورت به ازای هر α و β که $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$، تجدید آرایشی مانند $\sum c'_n$ با مجموع های جزئی S_n وجود دارد به طوری که

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = \alpha \quad , \quad \limsup_{n\to\infty} S_n = \beta \tag{۲۹}$$

برهان. قرار دهید

$$a_n = \frac{|c_n| + c_n}{۲} \quad , \quad b_n = \frac{|c_n| - c_n}{۲} \quad (n \in \mathbb{N})$$

چون مجموع و تفاضل دو سری همگرا، همگراست پس باید هر دو سری نامنفی $\sum a_n$ و $\sum b_n$ واگرا باشند.

فرض کنید $A_۱, A_۲, A_۳, \cdots$ به ترتیب جملات مثبت و $B_۱, B_۲, B_۳, \ldots$ قدر مطلق های جملات منفی سری $\sum c_n$ باشند. سری های $\sum A_n$ و $\sum B_n$ فقط در جملات صفر با $\sum a_n$ و $\sum b_n$ اختلاف دارند، پس هر دو واگرا هستند.

دنباله‌های $\{m_n\}$ و $\{K_n\}$ را چنان تعریف می‌کنیم که سری

$$\begin{aligned} &A_۱ + A_۲ + \cdots + A_{m_۱} - B_۱ - B_۲ - \cdots - B_{k_۱} + \\ &A_{m_۱+۱} + \cdots + A_{m_۲} - B_{k_۱+۱} - \cdots - B_{k_۲} + \cdots \end{aligned} \tag{۳۰}$$

که یک تجدید آرایش سری $\sum C_n$ است در رابطه‌ی (۲۹) صدق کند.

فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌های حقیقی باشند که

$$x_n \to \alpha \quad , \quad y_n \to \beta \quad , \quad x_n < y_n \quad , \quad y_۱ > ۰$$

حال $m_۱$ و $k_۱$ را کوچکترین اعداد طبیعی می‌گیریم که

$$A_۱ + A_۲ + \cdots + A_{m_۱} > y_۱$$

$$A_۱ + A_۲ + \cdots + A_{m_۱} - B_۱ - B_۲ - \cdots - B_{k_۱} < x_۱$$

همچنین $m_۲$ و $k_۲$ را کوچکترین اعداد طبیعی می‌گیریم که

$$A_۱ + \cdots + A_{m_۱} - B_۱ - \cdots - B_{k_۱} + A_{m_۱+۱} + \cdots + A_{m_۲} > y_۲$$

$$A_۱ + \cdots + A_{m_۱} - B_۱ - \cdots - B_{k_۱} + A_{m_۱+۱} + \cdots + A_{m_۲} - B_{k_۱+۱} - \cdots - B_{k_۲} < x_۲$$

با ادامه‌ی این عمل، که به دلیل واگرا بودن $\sum A_n$ و $\sum B_n$ امکان پذیر است، دنباله‌های $\{m_n\}$ و $\{k_n\}$ ساخته می‌شوند.

هرگاه جمعک های جزئی (۳۰) را با S_n نشان دهیم آنگاه

$$|S_{m_n} - y_n| \le A_{m_n} \quad , \quad |S_{k_n} - x_n| < B_{k_n}$$

شرط $A_n \to ۰$ و $B_n \to ۰$. نتیجه می‌دهد

$$S_{m_n} \to \beta \quad , \quad S_{k_n} \to \alpha$$

چون هیچ عدد کمتر از α یا بیشتر از β نمی‌تواند یک حد زیردنباله‌ای S_n باشد پس

$$\limsup_{n\to\infty} S_n = \beta \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} S_n = \alpha$$

۹۳.۳ قضیه. فرض کنیم $\sum a_n$ به طور مطلق همگرا باشد،در این صورت هر تجدید آرایش آن به طور مطلق همگراست و مقدارش برابر مقدار $\sum a_n$ است.

برهان. فرض کنیم $\sum_{k=۱}^{\infty} a_{n_k}$ یک تجدید آرایش دلخواه $\sum a_n$ باشد.

نشان می‌دهیم $\sum_{k=۱}^{\infty} |a_{n_k}|$ همگراست.

فرض کنیم $S'_m = \sum_{k=۱}^{m} |a_{n_k}|$، در این صورت S'_m صعودی است و

$$S'_m = \sum_{k=۱}^{m} |a_{n_k}| \le \sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$$

پس S'_m همگراست. به سادگی ثابت شد $\sum_{k=۱}^{\infty} a_{n_k}$ به طور مطلق همگراست.

استدلال فوق، اطلاعاتی درباره‌ی مقدار $\sum_{k=۱}^{\infty} a_{n_k}$ ارائه نداد. در زیر برهان دیگری را می‌آوریم که علاوه بر همگرایی $\sum_{k=۱}^{\infty} a_{n_k}$، نشان می‌دهد که مقدار آن برابر مقدار $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ است.

فرض کنید $S_m = \sum_{n=۱}^{m} a_n$، $S''_m = \sum_{۱}^{m} a_{n_k}$

$\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم، چون $\sum |a_n|$ همگراست پس

$$\exists N \, \forall n \, \forall m \, (n, m > N \Longrightarrow \sum_{m}^{n} |a_n| < \varepsilon) \qquad (۳۱)$$

با توجه به پوشا بودن n_k، p را چنان بزرگ اختیار می‌کنیم که

$$\{۱, ۲, ۳, \ldots, N\} \subseteq \{n_۱, n_۲, \ldots, n_p\}$$

حال اگر $m > p$، آنگاه اعداد $a_۱, a_۲, \ldots, a_N$ در تفاضل $S_m - S''_m$ حذف می‌شوند در نتیجه

$$|S_m - S''_m| \le \sum_{N+۱}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

بنا بر این $\lim_{m\to\infty} S''_m = \lim_{m\to\infty} S_m$.

تمرین.

۱) به ازای چه مقادیر مختلط z، $\sum_{۰}^{\infty} \frac{۱}{۱+z^n}$ همگراست.

۲) p و q عدد حقیقی اند. در رفتار سری های زیر بحث کنید.
(آ) $\sum_{n=۱}^{\infty} p^n n^p \quad (p > ۰)$ (ب) $\sum_{۲}^{\infty} \frac{۱}{n^p - n^q} \quad (۰ < q < p)$
(پ) $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{p^n - q^n} \ (۰ < q < p)$ (ت) $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n \ln(۱ + \frac{۱}{n})}$

۳) فرض کنیم $S = \{n_۱, n_۲, \ldots\}$ آن اعداد طبیعی باشند که در نمایش اعشاری آن ها رقم صفر وجود ندارد (مثلاً $۷, ۹ \in S$ ولی $۱۱۰ \notin S$) ثابت کنید $\sum_{۱}^{\infty} \frac{۱}{n_k}$ همگراست و مقدارش از ۹۰ کمتر است.

۴) فرض کنید $a_n \geq ۰$ و $\sum a_n$ همگرا باشد. ثابت کنید $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^p} \quad (p > \frac{۱}{۲})$ همگراست. مثالی بزنید که $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$ واگرا باشد.

۵) فرض کنید $\sum a_n$ واگرا باشد. ثابت کنید $\sum n a_n$ نیز واگراست.

۶) فرض کنید $\sum a_n$ همگرا و $\sum (b_n - b_{n+۱})$ همگرای مطلق باشد. ثابت کنید $\sum a_n b_n$ همگراست.

۷) فرض کنید $A_n = \sum_{۱}^{n} a_k$ کراندار باشد و $\sum (b_n - b_{k+۱})$ همگرای مطلق باشد و نیز $b_n \to ۰$، در این صورت $\sum a_n b_n$ همگراست.

۸) $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح که بی نهایت تا از a_n ها ناصفرند. ثابت کنید شعاع همگرائی $\sum a_n x^n$ حداکثر یک است.

۹) فرض کنید $a_n > ۰$. $S_n = \sum_{۱}^{n} a_k$، و $\sum a_n$ واگرا باشد. در رفتار $\sum_{۱}^{\infty} \frac{a_n}{S^\alpha}$، به ازای مقادیر مختلف α بحث کنید.

۱۰) فرض کنید $a_n > ۰$ و $\sum a_n$ واگرا باشد.

(آ) نشان دهید اگر $\alpha > ۱$ آنگاه $\sum \frac{a_n}{۱ + n^\alpha a_n}$ همگراست.

(ب) نشان دهید اگر $\alpha \leq ۱$ آنگاه در باره‌ی $\sum \frac{a_n}{۱ + n^\alpha a_n}$ هیچ ادعائی نمی‌توان کرد.

۱۱) فرض کنید $a_n > ۰$ و $\sum a_n$ همگرا باشد و $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.
در رفتار $\sum \frac{a_n}{r_n^\alpha}$ به ازای مقادیر مختلف α بحث کنید.

۱۲) به سه روش مختلف زیر نشان دهید که سری $\sum \frac{۱}{n(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n})^\alpha}$ همگراست اگر $\alpha > ۱$، و واگراست اگر $\alpha < ۱$.

(آ) با استفاده از تمرین ۹ از همین بخش.

(ب) با استفاده از آزمون تراکم کوشی.

(پ) با استفاده از تمرین ۷ از بخش ۴۱.۳.

۱۳) فرض کنید $\{S_n\}$ دنباله‌ی مختلطی باشد. σ_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$$

(آ) ثابت کنید اگر $S_n \to S$ آنگاه $\sigma_n \to S$.

(ب) دنباله‌ی S_n را چنان مثال بزنید که همگرا نباشد ولی $\sigma_n \to 0$.

(پ) دنباله‌ی S_n را چنان پیدا کنید که $S_n > 0$ و $\limsup S_n = +\infty$ و $\sigma_n \to 0$.

(ت) با فرض $a_n = S_n - S_{n-1}$، ثابت کنید

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} k a_k$$

فرض کنید $\lim na_n = 0$ و σ_n همگرا باشد، ثابت کنید S_n نیز همگراست.
(پس عکس قسمت (آ) را با فرض $na_n \to 0$ اثبات کردیم) عکس (آ) را می‌توان با شرط کرانداری na_n ثابت کرد. برای اثبات می‌توانید به تمرین ۱۴ از فصل سوم آنالیز ریاضی والتر رودین مراجعه کنید.

(ث) هرگاه $S_n > 0$ آنگاه همواره $\sum \sigma_n$ واگراست.

۱۴) فرض کنید α مثبت باشد دنباله‌ی x_n را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\begin{cases} x_1 > \sqrt{\alpha} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{\alpha}{x_n}) \end{cases}$$

(آ) ثابت کنید x_n نزولی و حدّش $\sqrt{\alpha}$ است.

(ب) قرار دهید $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$، ثابت کنید $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$.

در نتیجه با فرض $\beta = ۲\sqrt{\alpha}$ خواهیم داشت $\varepsilon_{n+۱} < \beta(\frac{\varepsilon_۱}{\beta})^{۲^n}$.
این فرمول خوبی برای محاسبه‌ی ریشه‌ی دوم عدد α است و میزان خطا به سرعت کاهش می‌یابد.

۱۵) فرض کنید $\sum_۱^\infty a_n$ همگرا باشد و

$$b_n = \frac{a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n}{n(n+۱)} \quad , \quad c_n = \frac{a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n}{n}$$

نشان دهید
(آ) $\sum_۱^\infty b_n$ همگراست و $\sum_۱^\infty b_n = \sum_۱^\infty a_n$.
(ب) $c_n \to ۰$.
درباره‌ی $\sum_۱^\infty c_n$ چه می‌توان گفت؟

۱۶) ثابت کنید $\sum(-۱)^n(۱ - \sqrt[n]{a})$ همگراست. درباره‌ی سری های زیر چه می‌توان گفت؟

$$\sum_۱^\infty (۱ - \sqrt[n]{n}) \qquad \sum_۱^\infty (-۱)^n (۱ - \sqrt[n]{n})$$

۱۷) فرض کنید $A = \sum_۱^\infty \frac{(-۱)^{n-۱}}{n}$ $(A = \ln ۲)$ ثابت کنید.

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n}) = A$$

حد فوق را می‌توان به کمک یک انتگرال معین محاسبه کرد.

۱۸) رفتار سری هایی را که مولّد آن‌ها در زیر داده شده است بررسی کنید.

$$\ln^{-n} n, \quad \ln^{-p} n, \quad \ln^{-\ln n} n, \quad \ln^{-\ln(\ln n)} n, \quad e^{-\ln n}, \quad \ln n \cdot e^{-\sqrt{n}}$$

۱۹) فرض کنید $p, q > ۰$، نشان دهید سری

$$\sum_۱^\infty \frac{(p+۱)(p+۲)\cdots(p+n)}{(q+۱)(q+۲)\cdots(q+n)}$$

به ازای $q > p+۱$ همگرا، و به ازای $q \le p+۱$ واگراست.

۲۰) فرض کنید $a_n \geq ۰$ و a_{n_k} زیردنباله‌ی دلخواهی از a_n باشد.

(آ) اگر $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{۱}^{\infty} a_{n_k}$ همگراست.

(ب) عکس مطلب را تحقیق کنید.

۲۱) فرض کنید $\sum_{۱}^{\infty} a_{۲n} = A$ و $\sum_{۱}^{\infty} a_{۲n-۱} = B$، نشان دهید $\sum_{۱}^{\infty} a_n$ همگراست.

۲۲) ثابت کنید حاصل ضرب کوشی دو سری به طور مطلق همگرا، به طور مطلق همگراست.

۲۳) فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی از فضای متری X باشد به طوری که حداقل یک زیردنباله‌ی همگرا داشته باشد. نشان دهید a_n همگراست.

۲۴) فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده و ناتهی باشد به طوری که $E_{n+۱} \subseteq E_n$، و $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam} E_n = ۰$، نشان دهید $\bigcap_{۱}^{\infty} E_n$ یکانی است.

۲۵) فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای مجموعه‌های بسته و ناتهی در فضای متری تام X باشد به طوری که $E_{n+۱} \subseteq E_n$، و $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam} E_n = ۰$، نشان دهید $\bigcap_{۱}^{\infty} E_n$ یک مجموعه‌ی یکانی است.

۲۶) فرض کنید A مجموعه‌ی کلیه‌ی دنباله‌هایی مانند $a = \{a_n\}$ باشد که $a_n = ۰$ یا $a_n = ۲$. به ازای هر $a \in A$، عدد حقیقی x_a را به صورت $x_a = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_n}{۳^n}$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید مجموعه‌ی کلیه‌ی x_a ها دقیقاً همان مجموعه‌ی کانتور است.

۲۷) فرض کنید $\{x_n\}$ و$\{y_n\}$ دنباله‌های کوشی در فضای متری X باشند. ثابت کنید دنباله‌ی $\{d(x_n, y_n)\}$ همگراست.

فصل ۴

حد و پیوستگی

در این فصل مفهوم حد را ابتدا در توابع حقیقی و سپس در فضاهای متری تعریف خواهیم کرد. در هر قسمت سعی خواهد شد مفاهیم با مثال‌های روشنگر توضیح داده شود.

حد توابع حقیقی

۱.۴ تعریف. فرض کنید f تابع حقیقی با قلمرو E باشد، $E \subseteq \mathbb{R}$، گوییم حد تابع f، وقتی که x به سمت a میل کند، موجود و برابر l است هرگاه
(آ) f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.
(ب) به ازای هر عدد مثبت مانند ε عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in E$، اگر $0 < |x-a| < \delta$، آنگاه $|f(x)-l| < \varepsilon$.
در این صورت می‌نویسیم اگر $x \to a$، $f(x) \to l$ یا $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
در تعریف فوق، ممکن است f در a تعریف نشده باشد، یا اگر تعریف شده باشد لزومی ندارد که $f(a) = l$.

۲.۴ مثال. تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq \frac{1}{n} \\ x & , x = \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم حد f در $x = 0$ یا $x = 1$، موجود و برابر صفر است.

(آ) در نقطه‌ی $\alpha = ۰$، نشان می‌دهیم

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x \, (۰ < |x - ۰| < \delta \Longrightarrow |f(x) - ۰| < \varepsilon)$$

فرض کنید $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد، بنا بر خاصیت ارشمیدسی اعداد، عددی طبیعی مانند m موجود است به طوری که $\frac{۱}{m} < \varepsilon$، حال با انتخاب $\delta = \frac{۱}{m}$، حکم را ثابت می‌کنیم. به ازای هر x اگر $۰ < |x| < \sigma$، آنگاه
اگر x به صورت $\frac{۱}{n}$ باشد چون x از بازه‌ی $(۰, \frac{۱}{m})$ است داریم

$$|f(x)| = |x| = \frac{۱}{n} < \frac{۱}{m} < \varepsilon$$

و اگر x به صورت $\frac{۱}{n}$ نباشد آنگاه

$$|f(x)| = ۰ < \varepsilon$$

(ب) در نقطه‌ی $a = ۱$، نشان می‌دهیم

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x \, (۰ < |x - ۱| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

با انتخاب $\delta = \frac{۱}{۲}$، حکم را ثابت می‌کنیم به ازای هر x اگر $۰ < |x - ۱| < \frac{۱}{۲}$، آنگاه

$$|f(x)| = ۰ < \varepsilon$$

۳.۴ تمرین.

۱) حد توابع زیر در نقاط داده شده را در صورت وجود حد، حدس زده و با استفاده از تعریف حد، آن را ثابت کنید.

(آ) $f(x) = \begin{cases} x & , x \in Q \\ ۰ & , x \notin Q \end{cases}$، در نقطه‌ی $\alpha = ۰$ و $\alpha = ۱$.

(ب) $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}}$، در نقطه‌ی $\alpha > ۰$.

(پ) $f(x) = \begin{cases} x & , x \in Q \\ ۱ - x & , x \notin Q \end{cases}$، در نقطه‌ی $\alpha = \frac{۱}{۲}$ و $\alpha = ۰$.

(ت) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & , x \in Q \\ \frac{۲}{۳}x^۳ & , x \notin Q \end{cases}$ در نقاط ۱ و ۰. (آیا f در این نقاط مشتق پذیر است؟)

حدود یک طرفه

هرگاه در تعریف ۱.۴، متغیر x فقط محدود به بازه‌ای مانند $(a, a+\delta)$ باشد l را حد راست f در a و به علامت $f(a+)$ نشان خواهیم داد.
حد چپ به طریق مشابه تعریف می‌شود و به علامت $f(a-)$ نشان خواهیم داد.
تمرین. نشان دهید حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{[x^2]}{x}$ در نقطه‌ی $x = 1$ به ترتیب برابر ۰ و ۱ است.
۴.۴ **قضیه.** (آ) نشان دهید حد هر تابع در نقطه‌ای مانند a، در صورت وجود منحصر به فرد است.
(ب) شرط لازم و کافی برای آن که حد تابعی در نقطه‌ی a برابر l باشد آن است که

$$f(a+) = f(a-) = l$$

برهان قضیه به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

حد در فضاهای متری

تعریف ۱.۴ را با اندکی تغییر به فضاهای متری توسیع می‌دهیم. مطالب و قضایا را، در صورت امکان در فضاهای متری مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد.
۵.۴ **تعریف.** فرض کنید f تابعی از فضای متری (X, d) بتوی فضای متری (Y, ρ) با قلمرو E باشد هرگاه
(آ) α نقطه‌ی حدی E باشد $(\alpha \in X)$،
(ب) نقطه‌ای مانند l از Y باشد به طوری که

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\, (0 < d(x, \alpha) < \delta \;\&\; \alpha \in E \Longrightarrow \rho(f(x), l) < \varepsilon) \qquad (1)$$

گوییم حد تابع f، وقتی که x به سمت a میل کند، موجود است و برابر l است و می‌نویسیم اگر $x \to a$ آنگاه $f(x) \to l$ و یا $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
بنا بر رابطه‌ی (۱)، $\lim_{x\to a} f(x) = l$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} \rho(f(x), l) = 0$.
قضیه‌ی زیر حد توابع را بر حسب حدود دنباله‌ها بیان می‌کند، پس می‌تواند رابطه‌ای بین این فصل و فصل دنباله‌ها برقرار کند.

۶.۴ قضیه. فرض کنید f تابعی از فضای متری (X,d) به فضای متری (Y,ρ) با قلمرو E باشد و a را یک نقطه‌ی حدی E بگیرید، در این صورت
شرط لازم و کافی برای آن که

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \qquad (۲)$$

آن است که به ازای هر دنباله مانند $\{p_n\}$ از E که $\lim_{x\to a} p_n = l$، $p_n \neq a$، رابطه‌ی $\lim_{x\to a} f(p_n) = l$ برقرار باشد.

برهان لزوم. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = l$ و $\{p_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از E باشد به طوری که

$$p_n \to a \ , \ p_n \neq a$$

نشان می‌دهیم $\lim_{x\to a} \rho(f(x),l) = ۰$.
$\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم چون $f(x) \to l$، پس عددی مانند $\delta > ۰$ موجود است به طوری که

$$\forall x\,(۰ < d(x,a) < \delta \Longrightarrow \rho(f(x),l) < \varepsilon \qquad (۳)$$

چون $p_n \to a$، پس عددی طبیعی مانند m موجود است به طوری که
$\forall n\,(n \geq m \Longrightarrow d(p_n,a) < \delta)$
پس بنا بر رابطه‌ی (۳)، به ازای هر $n \geq m$،
$\rho(f(p_n),l) < \varepsilon$
برهان کفایت. بعکس، فرض کنید رابطه‌ی (۳) برقرار نباشد، پس
$\exists\varepsilon\,\forall\delta\,\exists x\,(۰ < d(x,a) < \delta \ \&\ \rho(f(x),l) \geq \varepsilon)$
با انتخاب $(n \in \mathbb{N})\ \delta = \frac{۱}{n}$ دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از E به دست می‌آوریم که
$d(x_n,a) < \frac{۱}{n} \ \&\ \rho(f(x_n),l) \geq < \varepsilon$
یعنی $x_n \to a$ امّا $f(x_n) \not\to l$، پس تناقض آشکار شد.

کاربردهایی از قضیه‌ی ۶.۴

در این قسمت چندین مثال و قضیه را به عنوان کاربردی از قضیه‌ی ۶.۴ بیان می‌کنیم.
۷.۴ مثال.

۱) نشان دهید حد تابع $f(x)=\sin\frac{۱}{x}$، وقتی که $x\to ۰$، موجود نیست.
حل. فرض کنید $\lim_{x\to ۰}\sin\frac{۱}{x}=\alpha$، قرار دهید $p_n=\frac{۱}{۲\pi n}$ و $q_n=\frac{۱}{۲\pi n+\frac{\pi}{۲}}$، بنا بر قضیه‌ی ۴

$$\sin\frac{۱}{p_n}\to\alpha\ ,\ \ \sin\frac{۱}{q_n}\to\alpha$$

امّا $\sin\frac{۱}{p_n}\to ۰$ و $\sin\frac{۱}{q_n}\to ۱$، یعنی $\alpha=۰$، $\alpha=۱$ و این امکان ندارد.

۲) نشان دهید هرگاه تابع f در نقطه‌ی a دارای حد باشد، آن حد منحصر به فرد است.
حل. فرض کنید $f(x)\to l$ و $f(x)\to l'$،
بنا بر قضیه‌ی ٦.۴، به ازای دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ که $p_n\to a$، $p_n\neq a$،

$$f(p_n)\to l\ \ \&\ \ f(p_n)\to l'$$

ثابت کردیم که حد هر دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است پس $l=l'$.

۸.۴ قضیه. فرض کنیم f و g توابع مختلطی بر فضای متری (X,d) با قلمرو E باشند و $p\in E'$ و $\lim_{x\to p}f(x)=A$، $\lim_{x\to p}g(x)=B$.
در این صورت
(آ) $\lim_{x\to p}[f(x)+g(x)]=A+B$
(ب) به ازای هر عدد مختلط مانند c، $\lim_{x\to p}cf(x)=cA$
(پ) $\lim_{x\to p}f(x)g(x)=AB$
(ت) بعلاوه اگر $B\neq ۰$، آنگاه $\lim_{x\to p}f(x)/g(x)=A/B$.
همه‌ی قسمتها را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی ٦.۴ و قضایای حد مجموع، حد حاصل ضرب و حد خارج قسمت در دنباله‌ها، نتیجه گرفت.

۹.۴ قضیه. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری باشد و $E\subseteq X$، $p'\in E$ و $f:E\to\mathbb{R}^k$ تابع برداری با مؤلفه‌های $f_۱$، $f_۲$، ...، f_k باشد یعنی $f=(f_۱,f_۲,\ldots,f_k)$، در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که حد تابع f، وقتی که $x\to p$، برابر $q=(q_۱,q_۲,\ldots,q_k)$ باشد آن است که به ازای هر $۱\le i\le k$،

$$\lim_{x\to p}f_i(x)=q_i$$

برهان. (طریقه‌ی اول) هر دو حکم از نامساوی زیر نتیجه می‌شود

$$|f_i(x)-q_i| \le \|f(x)-q\| \le \sum_{i=1}^{k} |f_i(x)-q_i|$$

(طریقه‌ی دوم) حکم از قضیه‌ی ۶.۴ و ۱۰.۳ نتیجه می‌شود.

۱۰.۴ قضیه. فرض کنید f و g توابع برداری بر E باشند و $p \in E'$ و

$$\lim_{x\to p} f(x) = A \ , \ \lim_{x\to p} g(x) = B$$

در این صورت داریم

(آ) $f+g \to A+B$

(ب) به ازای هر ثابت مانند c، $cf \to cA$

(پ) $f\cdot g \to A\cdot B$ (ضرب عددی)

برهان نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی ۹.۴ و قضایای حد مجموع و حد حاصل ضرب در توابع حقیقی می‌باشد.

توابع پیوسته

۱۱.۴ تعریف. فرض کنید f تابعی از فضای متری (X,d_X) به فضای متری (Y,d_Y) با قلمرو E باشد. گوییم f در نقطه‌ی $p\in E$ پیوسته است هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ باشد به قسمی که به ازای هر $x\in E$ اگر $d(x,p)<\delta$، آنگاه $d_Y(f(x),f(p))<\varepsilon$ و پس f در a پیوسته است اگر

$$\forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x\,(d_X(x,a)<\delta \ \ \& \ \ x\in E \Longrightarrow d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon) \qquad (۴)$$

f را در E پیوسته خوانند هرگاه f در هر نقطه‌ی E پیوسته باشد.

توجه کنید در تعریف فوق ممکن است a نقطه‌ی حدّی E نباشد یعنی a نقطه‌ی تنهای E باشد. چون به ازای هر نقطه‌ی تنها مانند a،

$$\exists\delta_1 \ N_{\delta_1}\cap E=\{a\}$$

در نتیجه رابطه‌ی (۴) برقرار است. به عبارت دیگر f را در نقاط تنها پیوسته فرض کردیم

هرگاه علاوه بر رابطه‌ی (۴)، a نقطه‌ی حدّی E نیز باشد، آنگاه f در a پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

۱۲.۴ **مثال.** به تابع حقیقی $f(x) = \sqrt{|x|(x-۱)}$ توجه کنید. قلمرو تابع مجموعه‌ی $E = \{۰\} \cup [۱, \infty)$ است. با تعریف ۱۱.۴، f در $a = ۰$ پیوسته است. در حالی که حد تابع در $a = ۰$ تعریف نشده است. در سایر نقاط E رابطه‌ی $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ برقرار است.

با استفاده از قضیه‌ی ۶.۴ می‌توان گفت، f در نقطه‌ی a پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله از E مانند p_n،

$$p_n \to a \Longrightarrow f(p_n) \to f(a)$$

در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم ترکیب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

۱۳.۴ **قضیه.** فرض کنید X، Y و Z فضاهایی متری باشند و f تابعی از $E \subseteq X$ به Y و g تابعی از $f(E)$ به Z باشد، در این صورت اگر f در $x_۰$ و g در $y_۰ = f(x_۰)$ پیوسته باشند آنگاه ترکیب آنها $h(x) = g(f(x))$ در $x_۰$ پیوسته است.

برهان. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ را داده باشند. چون g در $y_۰$ پیوسته است پس

$$\exists \delta_۱ \, \forall y \, (< d_Y(y, y_۰) < \delta_۱ \ \ \& \ \ y \in f(E) \Longrightarrow d_Z(g(y), g(y_۰)) < \varepsilon)$$

و چون f در $x_۰$ پیوسته است پس عددی مانند $\delta_۲$ موجود است به طوری که

$$\forall x \, (x \in E \ \ \& \ \ d_X(x, x_۰) < \delta_۲ \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_۰)) < \delta_۱)$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود که به ازای هر x از E،

$$d_X(x, x_۰) < \delta_۲ \Longrightarrow d_Z(g(f(x)), g(f(x_۰))) < \varepsilon$$

یعنی تابع h در $x_۰$ پیوسته است.

در قضیه‌ی زیر پیوستگی را به صورت دیگری توصیف خواهیم کرد. ابتدا به تعریف تصویر و تصویر معکوس توجه کنید.

۱۴.۴ **تعریف.** فرض کنید f تابعی بر X بتوی Y باشد،

(آ) به ازای هر $E \subseteq X$، تصویر E تحت f را چنین تعریف می‌کنیم

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}$$

پس بر طبق تعریف فوق

$$y \in f(E) \Longleftrightarrow \exists x \, (x \in E \ \ \& \ \ y = f(x))$$

(ب) به ازای هر $V \subseteq Y$، تصویر معکوس V تحت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^{-1}(V) = \{x : f(x) \in V\}$$

بنا بر این

$$x \in f^{-1}(V) \iff f(x) \in V$$

۱۵.۴ قضیه. فرض کنید f تابعی بر X بتوی Y باشد در این صورت f بر X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه‌ی باز مانند V از Y، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

برهان لزوم. فرض کنید f بر X پیوسته و V زیرمجموعه‌ی بازی از Y باشد، نشان می‌دهیم $f^{-1}(V)$ در X باز است.

فرض کنیم $p \in f^{-1}(V)$، پس $f(p) \in V$، چون V باز است عددی مانند $\varepsilon > 0$ موجود است به طوری که

$$N_\varepsilon(f(p)) \subseteq V$$

چون f در p پیوسته است، پس عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$\begin{aligned} \forall x\,(d(x,p) < \delta &\implies d(f(x), f(p)) < \varepsilon) \\ &\implies f(x) \in N_\varepsilon(f(p)) \\ &\implies f(x) \in V \\ &\implies x \in f^{-1}(V) \end{aligned}$$

یعنی $N_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$.

برهان کفایت. فرض کنید تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز، باز باشد نشان می‌دهیم f بر X پیوسته است. فرض کنید $p \in X$ و دلخواه باشد.

$\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم چون $N_\varepsilon(f(p))$ در Y باز است، پس تصویر معکوس آن یعنی $f^{-1}(N_\varepsilon)$ در X باز است، چون p عضو آن است پس نقطه‌ی درونی آن است یعنی عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$N_\delta(p) \subseteq f^{-1}(N_\varepsilon(f(p))) \qquad (۵)$$

پس به ازای هر x از X،

$$\begin{aligned} d_X(x,p) < \delta &\implies x \in f^{-1}(N_\varepsilon(f(p))) \\ &\implies f(x) \in N_\varepsilon(f(x)) \\ &\implies d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon \end{aligned}$$

۱۶.۴ نتیجه. تابع f از X به Y پیوسته است اگر و تنها اگر تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته، بسته باشد.

برهان لزوم. فرض کنید f پیوسته و V زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از Y باشد، پس V^c در Y باز است. بنا بر قضیه‌ی ۱۵.۴، $f^{-1}(V^c)$ در X باز است، چون $f^{-1}(V^c) = [f^{-1}(V)]^c$، پس $f^{-1}(V)$ در Y بسته است.

کفایت. فرض کنید تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته، بسته باشد نشان می‌دهیم f پیوسته است. برای این کار، کافی است نشان دهیم تصویر معکوس هر مجموعه‌ی باز، باز است. فرض کنید $V \subseteq Y$ و باز باشد پس V^c بسته است. بنا بر فرض $f^{-1}(V^c)$ در X بسته است چون $f^{-1}(V^c) = [f^{-1}(V)]^c$، پس $f^{-1}(V)$ در X باز است.

۱۷.۴ مثال.

۱) فرض کنید f تابعی حقیقی و پیوسته بر فضای متری X باشد $(f : X \to \mathbb{R})$ کدام یک از مجموعه‌های زیر در X باز، و کدام بسته اند.

$K = \{x : x \in X, f(x) = ۰\}$
$A = \{x : x \in X, f(x) > ۰\}$
$B = \{x : x \in X, ۱ \leq f(x) \leq ۲\}$
$C = \{x : x \in X, f(x) \in \mathbb{N}\}$

حل: چون $K = f^{-1}(\{۰\})$ و $\{۰\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است پس K در X بسته است و $A = f^{-1}((۰, \infty))$ پس A در X باز است. به همان طریق، $B = f^{-1}([۱, ۲])$ و $C = f^{-1}(\mathbb{N})$ پس هر دو بسته‌اند.

۲) فرض کنید $X = (۰, ۱] \cup [۲, ۳]$ و d متر قدر مطلق باشد، تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر } ۰ < x \leq ۱ \\ ۱ & \text{اگر } ۲ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که f تابعی پیوسته بر X است، چون مجموعه‌های $\{۰\}$، $\{۱\}$ هر دو بسته‌اند پس $A = (۰, ۱]$ و $B = [۲, ۳]$ هر دو در X بسته هستند.

۱۸.۴ خواص تصویر

خواص تصویر معکوس تحت توابع پیوسته را بررسی کردیم. حال اگر f تابعی پیوسته بر X بتوی Y باشد و $E \subseteq X$، کدام یک از صفات کرانداری، باز بودن، فشرده بودن و همبند بودن E به $f(E)$ منتقل می‌شود؟

مثال ۱. تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر فضای $X = (۰, \infty)$ پیوسته است، با اینکه $E = (۰, ۱)$ کراندار است امّا $f(E) = (۱, \infty)$ کراندار نیست.

مثال ۲. تابع حقیقی $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است و $E = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ مجموعه‌ای باز است در حالی که $f(E) = [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ باز نیست.

مثال ۳. فرض کنید $X = [0, \infty)$ و $Y = [0, 1]$ با متر قدر مطلق و تابع

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } 0 \leq x \leq 1 \text{ ,} \\ \frac{1}{x} & \text{اگر } 1 \leq x < \infty \text{ ,} \end{cases}$$

در این صورت f تابعی پیوسته بر X بروی Y است با اینکه $\mathbb{N}$ در X بسته است امّا $f(\mathbb{N}) = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ در Y بسته نیست.

طی مثالهای یک و دو و سه ملاحظه کردیم که صفات باز بودن، بسته بودن و کراندار بودن ممکن است توسط توابع پیوسته به تصویر منتقل نشوند امّا نشان خواهیم داد صفات فشردگی و همبندی توسط توابع پیوسته به تصویر منتقل می‌شوند.

پیوستگی و فشردگی

۱۹.۴ **قضیه.** فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد در این صورت به ازای هر $E \subseteq X$، اگر E فشرده باشد آنگاه $f(E)$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_\alpha$ پوشش باز و دلخواه $f(E)$ باشد به ازای هر α چون G_α در Y باز است و f پیوسته است پس تصویر معکوس آن یعنی $f^{-1}(G_\alpha)$ در X باز است و چون $X \subseteq \bigcup_\alpha f^{-1}(G_\alpha)$، پس تعدادی متناهی از این پوشش، X را می‌پوشاند یعنی α_1، α_2، ...، α_n موجود است به طوری که $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})$، بنا بر این

$$f(X) \subseteq f(\bigcup_1^n f^{-1}(G_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(G_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

توجه : در استدلال فوق از رابطه‌ی $f(f^{-1}(H)) \subseteq H$ استفاده کردیم که همواره برقرار است نشان دهید تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f پوشا باشد.

همچنین رابطه‌ی $H \subseteq f^{-1}(f(H))$ به ازای هر H برقرار است اما تساوی برقرار است اگر و تنها اگر f یک به یک باشد.

حال از قضیه‌ی ۱۹.۴ چند نتیجه به دست می آوریم.

۲۰.۴ **قضیه.** هرگاه f تابعی پیوسته بر فضای متری و فشرده‌ی X به Y باشد آنگاه $f(X)$ بسته و کراندار است.

برهان. چون X فشرده و f پیوسته است پس $f(X)$ فشرده است در نتیجه بسته و کراندار است (به مثال ۱ از ۱۸.۴ توجه کنید.)

تابع $f(x) = x^۲$ با اینکه در $(۰, ۱)$ پیوسته است امّا دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق نیست.

۲۱.۴ قضیه. فرض کنیم f تابعی حقیقی و پیوسته بر فضای متری و فشرده X باشد در این صورت f بر X دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است یعنی α و βای از X موجودند به طوری که

$$\forall x\,(x \in X \Longrightarrow f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha))$$

برهان. چون $f(X)$ فشرده است پس بسته و کراندار است.

چون کراندار است، پس $\sup f(X)$ و $\inf f(X)$ هر دو موجود هستند و می‌دانیم

$$\sup f(X) \in \overline{f(X)}\,,\ \inf f(X) \in \overline{f(X)}$$

چون $f(X)$ بسته است، پس $f(X) = \overline{f(X)}$ یعنی سوپرمم و اینفیمم $f(X)$ هر دو عضو $f(X)$ هستند.

اینک توصیف دیگری از پیوستگی را که نتیجه‌ی ۱۵.۴ است معرفی می‌کنیم، این توصیف در انتقال همبندی توسط توابع پیوسته کاربرد دارد.

۲۲.۴ قضیه. فرض کنیم f تابعی بر فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد در این صورت شرط لازم و کافی برای آن f بر X پیوسته باشد آن است که به ازای هر $E \subseteq X$، $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$. یعنی

$$\text{f بر X پیوسته است} \iff \forall E\,(E \subseteq X \Longrightarrow f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)})$$

برهان لزوم. ابتدا فرض کنید f بر X پیوسته باشد و $E \subseteq X$، همواره داریم

$$E \subseteq f^{-۱}(f(E)) \subseteq f^{-۱}(\overline{f(E)})$$

بنا بر این

$$\overline{E} \subseteq \overline{f^{-۱}(\overline{f(E)})}$$

چون $\overline{f(E)}$ بسته است و f پیوسته است پس تصویر معکوس آن یک مجموعه‌ی بسته‌ای است در نتیجه $\overline{f^{-۱}(\overline{f(E)})} = f^{-۱}(\overline{f(E)})$، لذا

$$\overline{E} \subseteq f^{-۱}(\overline{f(E)})$$

و یا

$$f(\overline{E}) \subseteq f(f^{-۱}(\overline{f(E)})) \subseteq \overline{f(E)}$$

طریقه‌ی دوم، فرض کنیم $y \in f(E)$ و دلخواه باشد، پس

$$\exists x\,(x \in \overline{E}\,\&\,y = f(x))$$

چون $x \in \overline{E}$، پس دنباله‌ای از E مانند x_n موجود است به طوری که

$$\lim x_n = x \quad \text{((قضیه‌ی ۷.۳ (آ))}$$

چون f در X پیوسته است پس $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = y$.

از این که $f(x_n) \in f(E)$ و $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ بنا بر قضیه‌ی ۷.۳، $y \in \overline{f(E)}$.

برهان کفایت. فرض کنیم به ازای هر E رابطه‌ی $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ برقرار باشد نشان می‌دهیم f بر X پیوسته است، کافی است نشان دهیم تصویر معکوس هر مجموعه‌ی بسته، بسته است.

فرض کنیم $V \subseteq Y$ و V در Y بسته باشد بنا بر فرض

$$f(\overline{f^{-1}(V)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(V))} \subseteq \overline{V} = V \Longrightarrow \overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V)$$

یعنی $f^{-1}(V)$ بسته است.

پیوستگی و همبندی

۲۳.۴ قضیه. فرض کنیم f تابعی پیوسته بر فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد در این صورت به ازای هر $E \subseteq X$، اگر E همبند باشد، آنگاه $f(E)$ همبند است.

برهان. هر گاه $f(E)$ همبند نباشد، آنگاه زیرمجموعه‌هایی مانند A و B از Y موجودند به طوری که ناتهی هستند و $f(E) = \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$، قرار می‌دهیم

$$A_1 = E \cap f^{-1}(A)\,,\ B_1 = E \cap f^{-1}(B)$$

در این صورت چون A و B ناتهی هستند پس A_1 و B_1 نیز ناتهی می‌باشند و $E = A_1 \cup B_1$، و نیز داریم

$$\begin{aligned} f(\overline{A_1} \cap B_1) &\subseteq f(\overline{A_1}) \cap f(B_1) \\ &\subseteq \overline{f(A_1)} \cap f(B_1) \quad \text{(بنا بر قضیه‌ی ۲۲.۴)} \\ &\subseteq \overline{A} \cap B = \varnothing \end{aligned}$$

بنا بر این $\overline{A_1} \cap B_1 = \varnothing$، به همین طریق $A_1 \cap \overline{B_1} = \varnothing$،

پس ثابت کردیم E ناهمبند است و این یک تناقض است در نتیجه $f(E)$ همبند است قضیه‌ی زیر نتیجه‌ی مهمی از قضیه‌ی ۲۳.۴ درباره‌ی توابع حقیقی است.

۲۴.۴ قضیه. فرض کنیم f تابع حقیقی پیوسته بر بازه‌ی $[a,b]$ باشد و $f(a) < f(b)$ در این صورت به ازای هر c، که $f(a) < c < f(b)$، نقطه‌ای مانند x از (a,b) موجود است به طوری که $f(x) = c$.

برهان. چون $[a,b]$ همبند و f پیوسته است پس $f([a,b])$ همبند است و چون c بین دو عضو آن است، پس عضو آن است.

یعنی $c \in f([a,b])$، امّا $c \neq f(a)$ و $c \neq f(b)$، پس $c \in f((a,b))$ بنا بر این xای از (a,b) موجود است که $f(x) = c$.

درقضیه‌ی فوق، هرگاه $f(a) > f(b)$، نتیجه‌ی مشابهی برقرار است.

۲۵.۴ **تعریف.** فرض کنیم f تابع حقیقی بر $E \subseteq \mathbb{R}$ باشد، گوییم f در E در خاصیت میانی صدق می‌کند هرگاه

به ازای هر a و b از E و هر λ اگر λ بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه نقطه‌ای مانند x بین a و b موجود باشد به طوری که $f(x) = \lambda$.

به عبارت دیگر هر خط افقی مانند $y = \lambda$ که بین خطوط $y = f(a)$ و $y = f(b)$ واقع باشد، نمودار f را حداقل در یک نقطه، قطع کند.

در قضیه‌ی ۲۴.۴ نشان دادیم که هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته در خاصیت میانی صدق می‌کند عکس مطلب برقرار نیست زیرا تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

در خاصیت میانی صدق می‌کند امّا در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته نیست.

۲۶.۴ **تمرین.**

۱) فرض کنید f تابعی حقیقی و پیوسته بر $[a,b]$ باشد و M و m به ترتیب سوپرمم و اینفیمم f باشند (ماکزیمم و مینیمم مطلق نیز هستند) در این صورت به ازای هر λ که $m \leq \lambda \leq M$، نقطه‌ای مانند $c \in [a,b]$ موجود است به طوری که $f(c) = \lambda$.

۲) فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی c پیوسته باشد نشان دهید

(آ) اگر $f(c) > 0$ آنگاه یک همسایگی c موجود است که f در آن مثبت است.

(ب) اگر $f(c) < 0$ آنگاه یک همسایگی c موجود است که f در آن منفی است به عبارت دیگر،هر تابع پیوسته در هر نقطه، حفظ علامت می‌کند.

۳) فرض کنید f تابع حقیقی پیوسته بر $[a,b]$ باشد و $f(a)f(b) < 0$ در این صورت $\exists c\,(c \in (a,b)\ \&\ f(c) = 0)$

این تمرین را به دو طریق زیر ثابت کنید.

(آ) به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۲۴.۴.

(ب) فرض کنید $f(a) > 0$، مجموعه‌ی A را چنین تعریف کنید

$A = \{x : a \leq x \leq b, f(x) > 0\}$

واضح است که A ناتهی و کراندار است. فرض کنید $c = \sup A$، نشان دهید $f(c) = ۰$. در صورتی که $f(c) \neq ۰$ به کمک تمرین ۲ به تناقضی خواهید رسید.

۴) برهان دیگری برای قضیه‌ی ۲۴.۴ به صورت زیر ثابت کنید
فرض کنید $g(x) = f(x) - c$، در این صورت $g(a)g(b) < ۰$،و g پیوسته است پس بنا بر تمرین ۳،نقطه‌ای مانند $x \in (a, b)$ موجود است به طوری که $g(x) = ۰$ یا $f(x) = c$.

یکی از قضایای مهم آنالیز ریاضی قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت است. حالت ساده‌ای از این قضیه عبارت است از :
هرگاه f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ بتوی $[a, b]$ باشد آنگاه نقطه‌ای مانند x موجود است که $f(x) = x$ (چنین x را نقطه‌ی ثابت f گویند)
در صورتی که قرار دهیم $g(x) = f(x) - x$،هرگاه $g(a) = ۰$ یا $g(b) = ۰$ آنگاه حکم برقرار است در غیر ان صورت $g(a)g(b) < ۰$
پس بنا بر تمرین ۳ از بخش ۲۶.۴، نقطه‌ای مانند $x_۱$ موجود است به طوری که $g(x_۱) = ۰$ یا $f(x_۱) = x_۱$، شکل نسبتاً کلی تری از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت را در زیر بیان می‌کنیم.

۲۷.۴ قضیه. (نقطه‌ی ثابت) فرض کنیم X یک فضای متری تامّ و f تابعی پیوسته بر X بتوی X باشد به طوری که عددی مانند $۰ < M < ۱$ موجود باشد که به ازای هر x و y،

$$d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y) \qquad (۶)$$

در این صورت f نقطه‌ی ثابت منحصر بفردی دارد. رابطه‌ی (۶) نشان می‌دهد که f یک انقباض است (رجوع کنید به تمرین ۴ از ۳۳.۴)
برهان منحصر به فردی : فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ نقاط ثابت f باشند و $x_۱ \neq x_۲$
$f(x_۱) = x_۱$, $f(x_۲) = x_۲$

در این صورت،

$$d(x_۱, x_۲) = d(f(x_۱), f(x_۲)) \leq M d(x_۱, x_۲) < d(x_۱, x_۲)$$

که یک تناقض است.
برهان وجود نقطه‌ی ثابت: فرض کنید $c \in X$ یک نقطه‌ی دلخواه باشد دنباله‌ی $\{x_n\}_۱^\infty$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$x_0 = c\,,\ x_{n+1} = f(x_n)\,,\ (n \in \mathbb{N})$

دراین صورت داریم

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1}) \leq M d(x_k, x_{k-1})$$

پس به ازای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq M^k d(x_1, x_0)$$

بنا بر این به ازای هر $n > m$ داریم

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=m}^{n} M^k$$

چون سری هندسی $\sum_1^\infty M^n$ همگراست پس در شرط کوشی صدق می‌کند در نتیجه‌ی دنباله‌ی $\{x_n\}_1^\infty$ نیز در شرط کوشی صدق می‌کند چون X تام است پس x_n همگرا به نقطه‌ای مانند $p \in X$ است حال از رابطه‌ی $x_{n+1} = f(x_n)$ حد می‌گیریم، پیوستگی f نتیجه می‌دهد

$$p = f(p)$$

پیوستگی یکنواخت

۲۸.۴ **تعریف.** فرض کنیم f تابعی بر فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد هر گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$،عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر p وq از X،

$$d_X(p, q) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

گوئیم f بر X به طوریکنواخت پیوسته است.

مجدداً تعریف پیوستگی و پیوستگی یکنواخت یک تابع بر یک مجموعه مانند E را تکرار می‌کنیم تا ضمن مقایسه‌ی آنها به تفاوتهای آنها نیز توجه کنید

f را بر E پیوسته خوانیم هر گاه

$$\forall p\, \forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall q\, (d_X(p, q) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon) \qquad (۷)$$

f را بر E به طوریکنواخت پیوسته خوانیم هرگاه

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall p\, \forall q\, (d_X(p, q) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon) \qquad (۸)$$

در روابط (۷) و (۸) p و q مقید به E هستند.

تفاوت موجود بین پیوستگی و پیوستگی یکنواخت عبارت است از :

(آ) پیوستگی یکنواخت،خاصیتی از یک تابع بر یک مجموعه است، در حالیکه پیوستگی یک صفت موضعی است. یعنی می‌توان پیوستگی را در یک نقطه تعریف کرد، پیوستگی یکنواخت یک تابع در یک نقطه بی معنی است.

(ب) در تعریف پیوستگی به ازای هر $\varepsilon > ۰$ و هر نقطه از X مانند p، عددی مانند $\delta > ۰$ پیدا می‌کنیم که در تعریف ۱۱.۴ صدق می‌کند، این δ نه تنها به $\varepsilon > ۰$ بلکه به p نیز بستگی دارد یعنی در هر نقطه ، یک δ که مخصوص آن نقطه است پیدا می‌شود امّا در پیوستگی یکنواخت δ فقط به ε وابسته است یعنی با یک δ بتوان پیوستگی f در هر نقطه‌ی X را ثابت کرد.

۲۹.۴ مثال.

۱) نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \sin x$ بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد چون به ازای هر p و q،

$$|\sin p - \sin q| \leq |p - q|$$

پس اگر $\delta = \varepsilon$ باشد حکم برقرار است.

۲) نشان دهید $f(x) = \sqrt{x}$ بر $[۰, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است ثابت می‌کنیم

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x \, \forall y \, (|x - y| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon)$$

$\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم، رابطه‌ی

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \varepsilon$$

در صورتی برقرار است که $|x - y| < \varepsilon^۲$. پس $\delta = \varepsilon^۲$

۳) نشان می‌دهیم تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر هر بازه‌ی به صورت $[a, \infty)$، $a > ۰$ به طور یکنواخت پیوسته است، رابطه‌ی

$$|\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}| = \frac{|x - y|}{xy} \leq \frac{|x - y|}{a^۲} < \varepsilon$$

در صورتی برقرار است که $|x - y| < \varepsilon a^۲$، پس $\delta = \varepsilon a^۲$.

۴) نشان می‌دهیم $f(x) = \frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $(۰, ۱)$ به طور یکنواخت پیوسته نیست. پس باید ثابت کنیم

$$\exists \varepsilon \, \forall \delta \, \exists x \, \exists y \, (|x - y| < \delta \quad \& \quad |\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}| \geq \varepsilon)$$

فرض کنید $\varepsilon = ۱$ و δ دلخواه باشد.
هرگاه $\delta \geq ۱$، آنگاه فرض کنید $x = \frac{۱}{۲}$، $y = \frac{۱}{۳}$ در نتیجه

$$|x-y| = \frac{۱}{۶} < \delta \quad \& \quad |\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}| = ۱ \geq \varepsilon$$

ولی اگر $\delta < ۱$، آنگاه فرض کنید $x = \delta$، $y = \frac{\delta}{۲}$، در نتیجه

$$|x-y| = \frac{\delta}{۲} < \delta \quad \& \quad |\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}| = \frac{۱}{\delta} > ۱ = \varepsilon$$

در تعریف حد یا در تعریف پیوستگی و پیوستگی یکنواخت همواره می‌توان ε و δ را از بالا محدود گرفت مثلاً می‌توان هر دو را کوچکتر از یک گرفت. بنا بر این در استدلال فوق لزومی به حالت $\delta \geq ۱$ نیست.

واضح است هر تابعی که به طور یکنواخت پیوسته باشد پیوسته نیز می‌باشد امّا عکس مطلب همواره برقرار نیست در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم در فضاهای فشرده این دو مفهوم معادلند.

۳۰.۴ قضیه. فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بر فضای متری و فشرده‌ی X بتوی فضای متری Y باشد، در این صورت، f بر X به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان. $\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم چون f بر X پیوسته است پس به ازای هر $a \in X$، $\delta > ۰$ای موجود است به طوری که

$$\forall x \, (d(x,a) < \delta_a \Longrightarrow d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{۲}) \qquad (۹)$$

فرض کنید $F = \{N_{\frac{\delta_x}{۲}}(a) : a \in X\}$، F یک پوشش باز X است. چون X فشرده است پس تعدادی متناهی از اعضای F قادر به پوشاندن X است یعنی نقاطی مانند $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n موجودند به طوری که

$$X \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} N_{\frac{\delta_i}{۲}}(a_i)$$

قرار می‌دهیم $\delta = \min_{۱ \leq i \leq n} \frac{\delta_i}{۲}$، حکم را ثابت می‌کنیم
فرض کنید p و q دلخواه از X باشند به طوری که $d(p,q) < \delta$، چون $p \in X$، پس iای هست که $p \in N_{\frac{\delta_i}{۲}}(a_i)$، یعنی

$$d(p, a_i) < \frac{\delta_i}{۲}$$

حال فاصله‌ی q از آن a_i را بررسی می‌کنیم

$$d(q, a_i) \leq d(q,p) + d(p, a_i) < \delta + \frac{\delta_i}{۲} < \frac{\delta_i}{۲} + \frac{\delta_i}{۲} = \delta_i$$

یعنی p، q هر دو در رابطه‌ی (۹) صدق می‌کنند، بنا بر این

$$\begin{aligned} d(f(p),f(q)) &\leq d(f(p),f(a_i))+d(f(a_i)+f(q)) \\ &< \frac{\varepsilon}{۲}+\frac{\varepsilon}{۲}=\varepsilon \end{aligned}$$

به برهان دیگری از این قضیه توجه کنید.
فرض کنید f بر X به طور یکنواخت پیوسته نباشد یعنی

$$\exists\varepsilon\,\forall\delta\,\exists x\,\exists y\,(d(x,y)<\delta \;\;\&\;\; d(f(x),f(y))\geq\varepsilon) \qquad (۱۰)$$

با انتخاب $(n\in\mathbb{N})\,\delta=\frac{۱}{n}$، x_n و y_n از X موجودند که

$$d(x_n,y_n)<\frac{۱}{n} \;\;\&\;\; d(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon \qquad (۱۱)$$

چون X فشرده است پس x_n زیر دنباله‌ای مانند x_{n_k} دارد که همگرا به نقطه‌ای مانند $p\in X$ است بنا بر (۱۱) به ازای هر k،

$$d(x_{n_k},y_{n_k})<\tfrac{۱}{n_k}$$

پس $y_{n_k}\to p$، به دلیل پیوستگی f در p،

$$\lim_{k\to\infty} d(f(x_{n_k}),f(p))=\lim_{k\to\infty} d(f(y_{n_k}),f(p))=۰$$

چون

$$d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))\leq d(f(x_{n_k},f(p))+d(f(p),f(y_{n_k}))$$

پس $\lim_{k\to\alpha} d(f(x_{n_k}),f(y_{n_k}))=۰$، و این خلاف (۱۱) است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

در قضیه‌ی ۳۰.۴ دیدیم که اگر قلمرو تابع پیوسته‌ای فشرده باشد آن تابع به طور یکنواخت پیوسته است پس اگر f تابع پیوسته‌ای بر بازه‌ی $[a,b]$ باشد آنگاه f به طور یکنواخت پیوسته است حال اگر قلمرو تابع پیوسته‌ی f به صورت (a,b) یا (a,∞) و امثال آنها باشد f دارای چه شرطی باشد تا پیوستگی یکنواخت را بتوان نتیجه گرفت.

پیوستگی یکنواخت توابع حقیقی

۳۱.۴ قضیه. فرض کنید f تابع حقیقی پیوسته بر (a,b) باشد هر گاه $f(a+)$ و $f(b-)$ هر دو موجود باشند آنگاه f بر (a,b) به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان. تعریف کنید

$$f(a) = f(a+) \ , \ \ f(b) = f(b-)$$

در نتیجه f بر $[a,b]$ پیوسته است، پس f بر $[a,b]$ و در نتیجه بر (a,b) به طور یکنواخت پیوسته است.

مثال: تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ بر هر بازه به صورت $(0,b)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

۳۲.۴ قضیه*. فرض کنید f تابع حقیقی پیوسته بر $[a,\infty)$ باشد و

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ \ (L \in \mathbb{R})$$

در این صورت f بر $[a,\infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان. $\varepsilon > 0$ را دلخواه در نظر می‌گیریم چون $\lim_{x\to\infty} = L$ پس عددی مانند M $(M > a)$ موجود است به طوری که

$$\forall x \, (x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}) \qquad (۱۲)$$

چون f بر $[a, M+1]$ به طور یکنواخت پیوسته است پس عددی مانند $\delta_1 > 0$ موجود است به طوری که

$$\forall x \forall y \, (|x-y| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon) \qquad (۱۳)$$

حال فرض کنید $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$، در این صورت به ازای هر x، y، اگر $|x-y| < \delta$، آنگاه دو حالت ممکن است اتفاق افتد

(آ) $a \le x \le M$، (ب) $M < x$

در حالت (آ)، چون $|x-y| < \delta \le 1$ پس $a \le y \le M+1$ بنا بر (۱۳) داریم

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

امّا در حالت (ب) برای y دو حالت اتفاق می‌افتد :

(I) $M \le y$، در این صورت

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - L| + |L - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(II) $y \le M$، شرط $|x-y| \le 1$ ایجاب می‌کند که $x \le M+1$، لذا حکم از (۱۲) نتیجه می‌شود.

مثال. تابع $\frac{\sin x}{x}$ بر $(0,\infty]$ به طور یکنواخت پیوسته است.

نتایج مشابه قضایای ۳۱.۴ و ۳۲.۴ در تمرینهای زیر بیان شده است.

۳۳.۴ تمرین.

۱) فرض کنید f تابع حقیقی و پیوسته بر $\mathbb{R}$ باشد و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ هر دو موجود باشند نشان دهید f بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است با مثالی نشان دهید عکس مطلب برقرار نیست.

*۲) f تابعی مشتق پذیر با مشتق کراندار بر بازه‌ی E می‌باشد و نشان دهید f به طور یکنواخت پیوسته است (مانند توابع $\sin x$، $\cos x$، $\tan^{-1} x$)

۳) f بر بازه‌های E_1 و E_2 به طور یکنواخت پیوسته است و $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$، نشان دهید f بر $E_1 \cup E_2$ به طور یکنواخت پیوسته است.

مثال. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر بگیرید. در بازه‌ی $[0, 1]$ به دلیل فشردگی بازه، و در بازه‌ی $[1, \infty)$ به دلیل کرانداری f'، به طور یکنواخت پیوسته است. پس f بر $[0, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است (به مثال ۲ از ۲۹.۴ توجه کنید)

۴) هر گاه اعدادی مانند $\alpha > 0$ و $M > 0$ باشند که به ازای هر x و y از E،

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha} \qquad (۱۴)$$

گوییم f در E، در **شرط لیپشیتز** از مرتبه‌ی α صدق می‌کند مانند توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{x}$، که

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \ , |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x - y|^{\frac{1}{2}}$$

نشان دهید

(آ) هر تابعی که در شرط لیپشیتز صدق کند به طور یکنواخت پیوسته است

*(ب) اگر $\alpha > 1$ آنگاه f مشتق پذیر است.

تعریف. هر گاه f در (۱۴) صدق کند و $\alpha = 1$، $M < 1$ می‌گوییم f یک **انقباض** است.

۵) فرض کنید f تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید f بر هر بازه‌ی کراندار به طور یکنواخت، پیوسته است.

۶) کدام یک از توابع زیر به طور یکنواخت پیوسته اند

(a) $f(x) = \sin \frac{۱}{x}$, $۱ \leq x < \infty$

(b) $f(x) = x \sin \frac{۱}{x}$, $۰ < x$

(c) $f(x) = x^{۲} \sin \frac{۱}{x}$, $۰ < x$

(d) $f(x) = \ln x$, $۰ < x$

(e) $f(x) = x^{۲}$, $x \in \mathbb{R}$

(f) $f(x) = \sin x^{۲}$, $x \in \mathbb{R}$

۷) نشان دهید مجموع و مضرب توابع به طوریکنواخت پیوسته، به طوریکنواخت پیوسته هستند امّا حاصلضرب دو تابع به طوریکنواخت پیوسته، ممکن است به طوریکنواخت پیوسته نباشد.

۸) نشان دهید ترکیب دو تابع به طوریکنواخت پیوسته، به طوریکنواخت پیوسته است.

۹) فرض کنید f تابعی به طوریکنواخت پیوسته بر فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد ثابت کنید اگر $\{x_n\}$ در X، کوشی باشد آنگاه $f(x_n)$ در Y، کوشی است.
کاربردی از تمرین ۹ :
آیا $f(x) = \frac{۱}{x}$ در $(۰, \infty)$ به طوریکنواخت پیوسته است ؟
دنباله‌ی $x_n = \frac{۱}{n}$ در شرط کوشی صدق می‌کند امّا $f(x_n) = n$ در شرط کوشی صدق نمی‌کند (واگراست) پس تابع $\frac{۱}{x}$ به طوریکنواخت پیوسته نیست
آیا تابع $g(x) = \sin \frac{۱}{x}$ در $(۰, ۱)$ به طوریکنواخت پیوسته است ؟
مجدداً به دنباله‌ی $\frac{۱}{n}$ توجه کنید، $g(\frac{۱}{n}) = \sin n$ در شرط کوشی صدق نمی‌کند.

۱۰) نشان دهید عکس تمرین ۹ برقرار نیست.

۱۱) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و متناوب باشد نشان دهید f به طوریکنواخت پیوسته است.

۱۲) فرض کنید f و g بر (a,b) به طوریکنواخت پیوسته باشند نشان دهید $f \times g$ نیز بر (a,b) به طوریکنواخت پیوسته است.

۱۳) فرض کنید f و g توابع کراندار و به طوریکنواخت پیوسته بر بازه‌ی I (کراندار یا بی کران) باشند ثابت کنید $f \times g$ نیز به طوریکنواخت پیوسته است.

پیوستگی تابع معکوس

۳۴.۴ **تعریف.** فرض کنید f تابعی یک به یک از فضای متری X بتوی فضای متری Y باشد تابع f^{-1} بر $f(X)$ با ضابطه‌ی

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad x \in X$$

را تابع معکوس f خوانند. هرگاه f پیوسته و یک به یک باشد آیا f^{-1} پیوسته است ؟

تمرین. فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته و یک به یک باشد نشان دهید f^{-1} پیوسته است

در حالت کلی پیوستگی f، نمی‌تواند پیوستگی f^{-1} را نتیجه دهد. به مثال زیر توجه کنید.

۳۵.۴ **مثال.**

۱) فرض کنید $X = [0, 2\pi)$ و $Y = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$.
تابع f از X بروی Y را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \ , 0 \le t < 2\pi$$

تابع f بر X پیوسته است. نشان می‌دهیم f^{-1} در نقطه‌ی $(1,0)$ پیوسته نیست. فرض کنید x_n دنباله‌ای دلخواه از ربع چهارم از Y باشد که همگرا به $(1,0)$ باشد. مثلاً

$$x_n = (\cos(2 - \tfrac{1}{n})\pi, \sin(2 - \tfrac{1}{n})\pi)$$

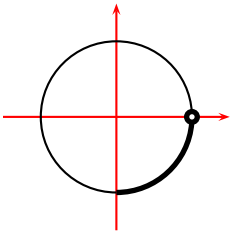
واضح است که $\lim_{n\to\infty} x_n = (1,0)$، امّا

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(2 - \tfrac{1}{n})\pi = 2\pi \neq f^{-1}((1,0)) = 0$$

به برهان دیگری توجه کنید :
چون به ازای هر $V \subseteq X$، همواره داریم $f^{-1^{-1}}(V) = f(V)$ پس بنا بر ۱۶.۴

f^{-1} بر Y پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه‌ی بسته مانند V از X، $f(V)$ در Y بسته باشد.

ملاحظه می‌کنیم که $V = [\frac{۳}{۴}\pi, ۲\pi)$ در فضای $X = [۰, ۲\pi)$ بسته است در حالی که $f(V)$ بسته نیست زیرا $(۱, ۰)$ نقطه‌ی حدّی $f(V)$ است امّا عضو آن نیست. توجه کنید $f(V)$ دقیقاً‌ربع چهارم دایره بدون نقطه‌ی $(۱, ۰)$ است.



*۲) شبیه مثال ۱ با ظاهری متفاوت :
فرض کنید $X = [۰, ۱)$، $f(x) = e^{۲\pi i x}$،یعنی f تابع مختلط

$$f(x) = \cos ۲\pi x + i \sin ۲\pi x$$

می‌باشد. تابع f بر X پیوسته است امّا نشان می‌دهیم $f^{-۱}$ در نقطه‌ی $f(۰)$ پیوسته نیست. فرض کنید $x_n = ۱ - \frac{۱}{n}$ در این صورت دنباله‌ی $y_n = f(x_n)$ همگرا به $f(۰)$ است در حالی که $f^{-۱}(y_n) = x_n$ همگرا نیست.

۳۶.۴ **قضیه.** فرض کنیم f تابع یک به یک و پیوسته‌ای بر فضای متری و فشرده‌ی X بروی فضای متری Y باشد در این صورت $f^{-۱}$ بر Y پیوسته است.

برهان. کافی است نشان دهیم به ازای هر مجموعه‌ی بسته مانند V از X، $f(V)$ در Y بسته است. فرض کنیم $V \subseteq X$ ،و V در X بسته باشد پس V در X فشرده است چون f پیوسته است لذا $f(V)$ فشرده است در نتیجه بسته است.

در مثال‌های فوق با اینکه Y فشرده بود امّا به دلیل فشرده نبودن X، $f^{-۱}$ پیوسته نشد.

۳۷.۴ **تعریف.** فرض کنید f تابعی پیوسته باشد در این صورت f را یک **تابع همسانریخت** و دو فضای X و Y را **همسانریخت** می‌نامند. بر طبق قضایای قبل هر تابع همسانریخت، حافظ خواصّ توپولوژیک است، یعنی مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز و بسته را به مجموعه‌های بسته می‌نگارد.

حال نشان می‌دهیم هر گاه فشردگی را از مفروضات قضایای ۱۹.۴، ۲۰.۴ و ۲۱.۴ و ۳۰.۴ حذف کنیم نتایج لازم به دست نخواهد آمد یعنی فشردگی یک شرط لازم است.

۳۸.۴ **قضیه.** فرض کنیم $E \subseteq \mathbb{R}$ و E فشرده نباشد، در این صورت
(آ) تابع پیوسته‌ای بر E هست که کراندار نیست.
(ب) تابع پیوسته و کرانداری بر E هست که ماکزیمم یا مینمم ندارد.

هرگاه علاوه بر این، E کراندار هم باشد، آنگاه

(پ) تابع پیوسته‌ای بر E هست که به طور یکنواخت پیوسته نمی‌باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید E کراندار باشد، لذا E بسته نیست، در نتیجه نقطه‌ی حدّی مانند p دارد که $p \notin E$.

تابع $f(x) = \frac{۱}{x-p}$ بر E پیوسته است امّا کراندار نیست همچنین به طور یکنواخت پیوسته نمی‌باشد زیرا به دلیل $p \in E'$، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از E هست که $x_n \to p$، پس x_n یک دنباله‌ی کوشی است امّا

$$f(x_n) = \frac{۱}{x_n - p} \to \infty$$

پس $f(x_n)$ یک دنباله‌ی کوشی نیست.

برای اثبات (ب) تابع g را بر E با ضابطه‌ی $g(x) = \frac{۱}{۱+(x-p)^۲}$ در نظر بگیرید ملاحظه می‌کنیم به ازای هر x، $۰ < g(x) < ۱$، و $\sup g = ۱$، امّا g دارای ماکزیمم نیست.

حال فرض کنید E بی‌کران باشد در این صورت تابع $f(x) = x$ قسمت (آ) و تابع $h(x) = \frac{x^۲}{۱+x^۲}$، قسمت (ب) را ثابت می‌کند.

توابع حقیقی چند متغیره

حد توابع را در فضاهای متری تعریف کردیم. در این بخش حد را برای توابع حقیقی چند متغیره تکرار می‌کنیم. برای سادگی مطلب، تعریف را برای توابع دو متغیره بیان می‌کنیم، برای سایرین به طریق مشابه می‌توان تعمیم داد.

۳۹.۴ تعریف. فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی باشد که در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $A(a,b)$ مانند $\bigvee$ تعریف شده باشد. هرگاه عددی مانند L موجود باشد به طوری که

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x \, \forall y \, (۰ < \sqrt{(x-a)^۲ + (y-b)^۲} < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon)$$

گوییم حد تابع f، وقتی که $(x,y) \to (a,b)$، موجود و برابر L است و می‌نویسیم

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

مثال ۱. نشان دهید حد تابع $f(x,y) = \frac{xy^۲}{x^۲+y^۲}$ در مبدأ مختصات موجود و برابر صفر است.

$\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم. نامساوی

$$|f(x,y) - ۰| \quad = \quad \frac{|xy^۲|}{x^۲ + y^۲} = \frac{|xy|}{x^۲ + y^۲} \times |y|$$

$$\leq \quad \frac{۱}{۲} \times |y| \leq \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲ + y^۲} < \varepsilon$$

در صورتی برقرار است که $\sqrt{x^۲ + y^۲} < ۲\varepsilon$، یعنی $\delta = ۲\varepsilon$ حکم برقرار است.
تمرین ۱. نشان دهید توابع زیر در $(۰, ۰)$ دارای حد می‌باشند.

$$f(x,y) = \tan^۲ x + \tan^۲ y \ , \ \ g(x,y) = \sin x + \sin y$$

۴۰.۴ قضیه. هرگاه $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $A \in \mathbb{R}^k$ دارای حد L باشد آنگاه تحدید f بر هر زیر مجموعه‌ای مانند E که $A \in E'$، دارای حد L است.
برهان به عنوان تمرین واگذار می‌شود.
مثال از کاربرد : تابع f را بر $\mathbb{R}^۲$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^۲+y^۲} & , \quad (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & , \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم تحدید f بر خط $y = x$ برابر است با $f(x,x) = \frac{۱}{۲}$ و بر خط $y = -x$ برابر است با $f(x,-x) = -\frac{۱}{۲}$، در صورت اول، حد برابر $\frac{۱}{۲}$ و در صورت دوم حد برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. پس بنا بر قضیه‌ی ۴۰.۴ تابع فوق در مبدأ دارای حد نمی‌باشد برای وجود حد تابع f در سایر نقاط به ۴۱.۴ مراجعه کنید.

حدود مکرّر

فرض کنید f تابع دو متغیره‌ی حقیقی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی $A(a,b)$ تعریف شده باشد در صورت وجود حدهای زیر، آنها را حدود مکرّر در A گویند.

$$\lim_{y \to b}[\lim_{x \to a} f(x,y)] \ , \ \lim_{x \to a}[\lim_{y \to b} f(x,y)]$$

تمرین ۱. نشان دهید اگر تابع f در نقطه‌ی A دارای حد باشد و حدود مکرّر نیز موجود باشند آنگاه آن سه برابرند.
تمرین ۲. با مثال نشان دهید که ممکن است حد تابع موجود باشد ولی حدود مکرّر موجود نباشند.
تمرین ۳. ممکن است حدود مکرّر موجود باشند ولی حد موجود نباشد.
تمرین. برای توابع زیر، وجود حد و حدود مکرّر را در مبدأ بررسی و سپس مقایسه کنید.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲} & , \quad (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & , \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{۱}{x} + y \sin \frac{۱}{x} & , \quad (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & , \quad (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

$$h(x,y) = \frac{۱}{x} \sin(xy), \quad h(۰,y) = ۰$$

توابع مختصی

۴۱.۴ تعریف. فرض کنیم $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ نقطه‌ی دلخواهی از $\mathbb{R}^k$ باشد توابع g_i بر $\mathbb{R}^k$ را با ضابطه‌ی $g_i(x) = x_i$ $(۱ \leq i \leq k)$، توابع مختصی خوانیم نامساوی $|g_i(x) - g_i(y)| \leq |x - y|$

نشان می‌دهند که g_iها در $\mathbb{R}^k$ پیوسته اند. البته به طور یکنواخت پیوسته اند.

بنا بر قضایای حد مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت، توابع زیر پیوسته اند.

$f(x,y) = x^۲ + y^۲$ ، $h(x,y) = \frac{xy}{x^۲+y^۲}$ $((x,y) \neq (۰,۰))$

زیرا $f = g_۱^۲ + g_۲^۲$ و $h = \frac{g_۱ \times g_۲}{g_۱^۲ + g_۲^۲}$

به همین طریق هر تک جمله‌ای به صورت $x_۱^{n_۱} x_۲^{n_۲} \cdots x_k^{n_k}$، که در آن n_iها اعداد صحیح مثبتی هستند بر $\mathbb{R}^k$ پیوسته اند در نتیجه هر چند جمله‌ای مانند

$$p(x) = \sum c_{n_۱} c_{n_۲} \cdots c_{n_k} x_۱^{n_۱} x_۲^{n_۲} \cdots x_k^{n_k}$$

که در آن c_iها اعداد مختلط و n_i اعداد صحیح و نامنفی و مقدار جملات متناهی است در $\mathbb{R}^k$ پیوسته اند.

همچنین هر تابع گویا از $x_۱$، $x_۱$، ...، x_k که مخرج مخالف صفر باشد پیوسته است.

۴۲.۴ قضیه. فرض کنید f، g، و h توابع حقیقی بر $\mathbb{R}^k$ باشند به طوری که در یک همسایگی محذوف A. $f \leq g \leq h$، در این صورت اگر

$$\lim_{x \to A} f(x) = \lim_{x \to A} h(x) = L$$

آنگاه $\lim_{x \to A} g(x) = L$.

مثال. $f(x,y) = \frac{x^۲ y}{x^۲+y^۲}$ را در نظر بگیرید همواره $|f| \leq \frac{۱}{۲}|x|$، پس $۰ \leq |f| \leq \frac{۱}{۲}|x|$ $\lim_{(x,y) \to (۰,۰)} f = ۰$.

ناپیوستگی‌های توابع حقیقی

۴۳.۴ **تعریف.** فرض کنیم f در نقطه‌ی c از قلمرو خود پیوسته نباشد. c را یک ناپیوستگی f خوانیم. ناپیوستگی‌ها را به دو دسته تقسیم خواهیم کرد.
هرگاه c یک ناپیوستگی f باشد و $f(c+)$، $f(c-)$ هر دو موجود باشند c را یک **ناپیوستگی ساده**، یا **نوع اول** f گوییم، در غیر این صورت آن را **ناپیوستگی نوع دوم** گوییم.

مثال ۱. همه‌ی ناپیوستگی‌های تابع $f(x) = [x]$ از نوع اول است.
در صورتی که $f(c) \neq f(c+) = f(c-)$ ناپیوستگی نوع اول را یک ناپیوستگی رفع شدنی نیز گویند.

مثال ۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{x}\,, & x \neq ۰ \\ ۰\,, & x = ۰ \end{cases}$$

تابع فوق در نقطه‌ی $x = ۰$ ناپیوستگی نوع دوم دارد امّا سایر ناپیوستگی از نوع ساده است.

مثال ۳. ناپیوستگی‌های همه‌ی توابع زیر از نوع دوم است.

$$f(x) = \begin{cases} ۱\,, & x \in Q \\ ۰\,, & x \notin Q \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x \in Q \\ \cos x\,, & x \notin Q \end{cases}$$

مثال ۴. هر عدد گویا را می‌توان به صورت $x = \frac{m}{n}$ نوشت که در آن $n > ۰$، و m، n اعداد صحیحی بدون مقسوم علیه مشترکی باشند. و نیز فرض کنید $\frac{۰}{۲} = ۰$. تابع f را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} ۰\,, & x \notin Q \\ \frac{۱}{n}\,, & x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

نشان می‌دهیم f در هر نقطه‌ی گنگ، پیوسته است و در هر نقطه‌ی گویا ناپیوستگی ساده دارد.
ابتدا خاصیتی از اعداد گویا را که در مسائل مشابه کاربرد دارد بیان و ثابت می‌کنیم.

۴۴.۴ **قضیه.** فرض کنید N عدد طبیعی دلخواه بوده و $[a,b]$ بازه‌ی مفروضی باشد. در این صورت اعداد گویای آن بازه که مخرج آنها از N کوچکتر باشند یعنی

$$\{\tfrac{m}{n} : \tfrac{m}{n} \in [a,b]\,, ۰ < n < N\}$$

یک مجموعه‌ی متناهی است.

برهان به عنوان تمرین واگذار می‌شود. به مثال زیر توجه کنید.
اعداد گویای بازه‌ی $[۰, ۱]$ که مخرج آنها از ۱۰ کوچکتر باشند عبارتند از

$$B_۱ = \{\tfrac{m}{۱} : \tfrac{m}{۱} \in [۰, ۱]\} = \{۰, ۱\}$$
$$B_۲ = \{\tfrac{m}{۲} : \tfrac{m}{۲} \in [۰, ۱]\} = \{\tfrac{۱}{۲}\}$$

$B_۳ = \{\frac{m}{۳} : \frac{m}{۳} \in [۰, ۱]\} = \{\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\}$

.

.

$B_۹ = \{\frac{m}{۹} : \frac{m}{۹} \in [۰, ۱]\} = \{\frac{۱}{۹}, \frac{۲}{۹}, \frac{۴}{۹}, \frac{۵}{۹}, \ldots, \frac{۸}{۹}\}$

حال رفتار تابع تعریف شده در مثال ۴ را بررسی می‌کنیم :
نشان می‌دهیم در هر نقطه مانند c، $\lim_{x\to c} f(x) = ۰$، که هر سه حکم از این حد، نتیجه می‌شود. $\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. بنا بر خاصیت ارشمیدسی اعداد، عددی طبیعی مانند N موجود است به طوری که $\frac{۱}{N} < \varepsilon$. بنا بر ۴۴.۴ مجموعه‌ی اعداد گویای همسایگی $۰ < |x - c| < ۱$ که مخرج آنها کوچکتر از N باشد متناهی است. فرض کنیم آن اعداد گویا $a_۱$، $a_۲$، ...، a_p باشند. حال فرض کنید

$$\delta = \min_{۱\le i\le p} |a_i - c|$$

پس در همسایگی محذوف $۰ < |x - c| < \delta$، چنان عدد گویا موجود نیست، در نتیجه به ازای هر x اگر $۰ < |x - c| < \delta$، آنگاه
اگر x گنگ باشد $|f(x)| = ۰ < \varepsilon$، ولی اگر $x = \frac{m}{n}$، داریم $n \ge N$، پس
$|f(x) = \frac{۱}{n} \le \frac{۱}{N} < \varepsilon$

در نتیجه ثابت شد حد تابع در هر نقطه موجود و برابر صفر است.
حال اگر c گنگ باشد آنگاه حد تابع برابر مقدار تابع می‌شود یعنی f در نقاط گنگ پیوسته است. امّا اگر c گویا باشد آنگاه حد تابع برابر مقدار تابع نمی‌شود یعنی f در نقاط گویا ناپیوسته است. چون حد موجود است پس ناپیوستگی‌ها از نوع اول است.
مثال ۵. با مفروضات مثال ۴، فرض کنید $۰ \le x \le ۱$ و

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \notin Q \\ m \sin \frac{۱}{n}\,, & x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

نشان دهید f در تمام نقاط $[۰, ۱]$ دارای حد است.
حل. نشان می‌دهیم به ازای هر $c \in [۰, ۱]$، $\lim_{x\to c} f(x) = c$.
حکم: $\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\, (۰ < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - c| < \varepsilon)$
$\varepsilon > ۰$ را دلخواه در نظر می‌گیریم عدد طبیعی q را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$|q \sin \frac{۱}{q} - ۱| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

(چون $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{۱}{n} = ۱$ این انتخاب امکان پذیر است) همانند مثال فوق فرض کنید $b_۱$، $b_۲$، ...، b_k اعداد گویای بازه‌ی $۰ < |x - c| < ۱$ باشند که مخرج آن‌ها از q

کمتر باشند و $\delta_۱ = \min_{۱\le i\le k} |b_i - c|$. حال فرض کنید

$$\delta = \min\{\delta_۱, \frac{\varepsilon}{۲}\}$$

پس در همسایگی $۰ < |x-c| < \delta$، چنان عدد گویا موجود نیست در نتیجه به ازای هر x اگر $۰ < |x-c| < \delta$، آنگاه

$$\begin{array}{rcl} x \notin Q & \Longrightarrow & |f(x)-c| = |x-c| < \delta < \frac{\varepsilon}{۲} < \varepsilon \\ x \in Q & \Longrightarrow & \exists m\, \exists n\, (x = \frac{m}{n}, (m,n) = ۱, n \ge q) \\ & \Longrightarrow & |f(x)-c| = |m \sin \frac{۱}{n} - \frac{m}{n} + \frac{m}{n} - c| \\ & \le & \frac{m}{n}|n \sin \frac{۱}{n} - ۱| + |x-c| \\ & \le & ۱ \times \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon \end{array}$$

پس مانند مثال ۴، این تابع در نقاط گنگ بازه‌ی $[۰, ۱]$ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است و ناپیوستگی‌ها از نوع اول می‌باشند.

در تمرینهای زیر توابعی معرفی شدند که از خواص مشابه مثالهای ۴ و ۵ بهره مند هستند در طرح آنها معمولاً از یک زیر مجموعه‌ی چگال استفاده شده است.

۴۵.۴ **تمرین.** نقاط ناپیوستگی توابع زیر را مشخص کرده و نوع آن‌ها را تعیین کنید.

۱) تابع f بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} ۰\ , & x \notin Q \\ \frac{۱}{n+|m|}\ , & x = \frac{m}{n}, (m,n) = ۱, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۲) تابع g بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است

$$g(x) = \begin{cases} ۱\ , & x \notin Q \\ \frac{n}{n+۱}\ , & x = \frac{m}{n}, (m,n) = ۱, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

۳) تابع h را بر $\mathbb{R}$ چنین تعریف می‌کنیم.
به ازای هر x، اگر x به صورت $\frac{m}{۲^n}$ باشد که در آن $n \in \mathbb{N}$، $m \in I$ و m و ۲^n مقسوم علیه مشترکی نداشته باشند $h(x)$ را برابر $\frac{۱}{n}$ و در غیر این صورت برابر صفر تعریف می‌کنیم.

توابع یکنوا

۴۶.۴ **تعریف.** تابع حقیقی f را بر (a,b) صعودی خوانیم هرگاه به ازای هر x و y،

$$a < x < y < b \Longrightarrow f(x) \le f(y)$$

و f را نزولی خوانیم در صورتی که به ازای هر x و y،

$$a < x < y < b \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

تابع یکنوا یعنی تابعی که صعودی یا نزولی باشد.

همان طوری که در بحث دنباله‌ها مشاهده کردیم که هر دنباله‌ی یکنوا دارای حد است توابع یکنوا نیز خوش رفتارند نشان خواهیم داد که در هر نقطه دارای حد چپ و راست هستند.

۴۷.۴ قضیه. فرض کنیم f بر (a,b) صعودی باشد در این صورت به ازای هر $c \in (a,b)$، $f(c+)$ و $f(c-)$ هر دو موجودند و

(آ) $f(c+) = \inf_{x>c} f(x)$

(ب) $f(c-) = \sup_{x<c} f(x)$

(پ) به علاوه به ازای هر $a < x < y < b$،

$$f(x+) \leq f(y-)$$

برهان (ب). فرض کنیم $E = \{f(t) : a < t < c\}$، چون E ناتهی و از بالا به $f(c)$ محدود است پس سوپرمم E موجود است. فرض کنیم $\alpha = \sup E$،نشان می‌دهیم $\lim_{x\to c^-} f(x) = \alpha$

حکم : $\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\, (c - \delta < x < c \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$

$\varepsilon > 0$ را دلخواه می‌گیریم بنا بر خاصیت مشخصه سوپرمم عددی مانند x_0 از (a,c) موجود است به طوری که

$$f(x_0) > \alpha - \varepsilon$$

حال فرض کنید $\delta = c - x_0$، به ازای هر x اگر $x_0 < x < c$،آنگاه

$$\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

قسمت (آ) به طریق مشابه ثابت می‌شود.

برهان (پ). بنا بر (آ) و (ب)

$$f(x+) = \inf\{f(t) : x < t < y\}$$
$$f(y-) = \sup\{f(t) : x < t < y\}$$

بنا بر این $f(x+) \leq f(y-)$

هر گاه f صعودی باشد آنگاه به ازای هر x، $f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$ قضیه مشابه برای توابع نزولی برقرار است.

نتیجه‌ی دیگر قضیه‌ی فوق، این است که توابع یکنوا ناپیوستگی نوع دوم ندارند.

در قضیه‌ی زیر نشان خواهیم داد که مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های چنین توابع، حداکثر شمارش پذیر است.

۴۸.۴ قضیه. فرض کنیم f بر (a,b) صعودی باشد. در این صورت مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های f حداکثر شمارش پذیر است.

برهان. فرض کنید E مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های f در (a,b) باشد یعنی

$$E = \{x : a < x < b\,,\ f(x-) < f(x+)\}$$

نشان می‌دهیم E با زیر مجموعه‌ای از Q همعدد است. برای این کار تابع F بر E بتوی Q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

به ازای هر $x \in E$ فقط یک عدد گویا از بازه‌ی $(f(x-), f(x+))$ گرفته و r_x می‌نامیم و تعریف می‌کنیم $F(x) = r_x$.

نشان می‌دهیم f یک به یک است. فرض کنید $x \neq y$، می‌توان فرض کرد $x < y$، بنا بر قضیه‌ی ۴۷.۴

$$F(x) = r_x < f(x+) \leq f(y-) < r_y = F(y)$$

در صورتی که $x > y$، به طریق مشابه می‌توان عمل کرد.

چون F یک به یک است پس E با زیر مجموعه‌ای از Q همعدد است چون زیر مجموعه‌های Q حداکثر شمارش پذیر هستند پس E نیز حداکثر شمارش پذیر است.

به همین روش می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های توابع نزولی نیز حداکثر شمارش پذیر است در مثالهای زیر توابعی یکنوا تعریف می‌کنیم که مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های آن‌ها شمارش پذیر باشند.

۴۹.۴ مثال.

۱) دنباله‌ی $\{S_n\}_۱^\infty$ از بازه‌ی $[۰\,,۱]$ را با ضابطه‌ی $S_n = \frac{n}{n+۱}$ در نظر بگیرید فرض کنید $C_n = \frac{۱}{۲^n}$. در این صورت تابع f بر $[۰\,,۱]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \textstyle\sum_{S_n<x} C_n\,,\ ۰ < x < ۱$$

که در آن جمع بندی روی آن nها گرفته می‌شود که برای آنها $S_n < x$، در صورتی که هیچ x_nای سمت چپ x قرار نگیرد f را صفر تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر

$$f(x) = \sum_{k=۱}^{n} C_k\,, \quad \frac{n}{n+۱} < x \leq \frac{n+۱}{n+۲}$$

مثلاً اگر $\frac{۱}{۴} \leq x < ۰$، آنگاه $f(x) = ۰$
یا اگر $\frac{۲}{۳} \leq x < \frac{۱}{۲}$، آنگاه $f(x) = \frac{۱}{۲}$.
ملاحظه می‌کنیم که f صعودی است و در نقاط $S_n = \frac{n}{n+۱}$ ناپیوسته است. به ازای هر n

$$f(S_n+) - f(S_n-) = \frac{۱}{۲^n}$$

تابع f در هر بازه به صورت $(S_n, S_{n+۱})$ ثابت است و همواره داریم $f(S_n-) = f(S_n)$ با همین تفکر به مثال زیر توجه کنید.

۲) فرض کنید $\{S_n\}_۱^\infty$ دنباله‌ای متمایز از بازه‌ی (a,b) باشد و $C_n > ۰$ و $\sum_۱^\infty C_n$ همگرا باشد تابع f را بر (a,b) چنین تعریف می‌کنیم $f(x) = \sum_{S_n \leq x} C_n$ یعنی به ازای هر n، C_n فقط و فقط وقتی در جمع فوق محاسبه می‌شود که S_n در رابطه‌ی $S_n \leq x$ صدق کند اگر هیچ S_n در $S_n \leq x$ صدق نکند f را برابر صفر تعریف می‌کنیم.
ابتدا نشان می‌دهیم f صعودی است. فرض کنید $a < x < y < b$،

$$f(y) = \sum_{S_n \leq y} C_n = \sum_{S_n \leq x} C_n + \sum_{x < S_n \leq y} \geq \sum_{S_n \leq x} C_n = f(x)$$

حال نشان می‌دهیم : f در S_nها ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است.
(آ) فرض کنید m دلخواه و ثابت باشد به ازای هر x، اگر $x < S_m$، آنگاه

$$f(S_m) = \sum_{S_n \leq S_m} C_n = \sum_{S_n \leq x} C_n + \sum_{x < S_n \leq S_m} C_n = f(x) + \sum_{x < S_n \leq S_m} C_n$$

چون همواره $\sum_{x < S_n \leq S_m} C_n \geq C_m$ پس f در S_m از چپ ناپیوسته است.
ملاحظه می‌کنید که به ازای هر m،

$$f(S_m+) = f(S_m)\,,\; f(S_m) - f(S_m-) = C_m$$

اینک نشان می‌دهیم f در سایر نقاط پیوسته است.
فرض کنیم α نقطه‌ی دلخواهی باشد به طوری که به ازای هر n، $\alpha \neq S_n$.
$\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم چون $\sum_۱^\infty C_n$ همگراست، عددی طبیعی مانند N موجود است که

$$\sum_{n=N+۱}^{\infty} C_n < \varepsilon$$

حال فرض کنید $\delta = \min_{1 \le i \le N} |S_i - \alpha|$، پس در همسایگی $0 < |x-\alpha| < \delta$، هیچ کدام از جملات S_1، S_2، ...، S_N موجود نیست در نتیجه به ازای هر x، اگر $\alpha < x < \alpha + \delta$، آنگاه

$$f(x) - f(\alpha) = \sum_{\alpha < S_n \le x} C_n \le \sum_{N+1}^{\infty} C_n < \varepsilon$$

اگر $\alpha - \delta < x < \alpha$، آنگاه

$$f(\alpha) - f(x) = \sum_{x < S_0 \le \alpha} C_n \le \sum_{N+1}^{\infty} C_n < \varepsilon$$

یعنی $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.
چون $\mathbb{Q}$ شمارش پذیر است پس می‌توان فرض کرد $\mathbb{Q} = \{S_n\}_1^{\infty}$، در این صورت f تابعی صعودی است که در اعداد گنگ پیوسته و در اعداد گویا ناپیوسته است. توابعی از این نوع را به کمک سریهای توابع در فصل‌های بعدی تعریف خواهیم کرد.

حدود نامتناهی و حدود در بی‌نهایت

تا این مرحله حد را در فضای متری تعریف کردیم. بنا بر این حد در $\mathbb{R}$ تعریف شده است (تعریف ۱.۴) برای ایجاد هماهنگی تعریف حد روی $\mathbb{R}^*$، مجدداً یادآوری می‌کنیم که برای تعریف حد در نقطه‌ای مانند p، لازم است که تابع f در یک همسایگی محذوف نقطه‌ی p تعریف شده باشد و نیز نقطه‌ای مانند L از $\mathbb{R}$ باشد که

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x \, (0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \qquad (۱۵)$$

رابطه‌ی (۱۵) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall x \, (x \in N_\delta^*(p) \cap D_f \Longrightarrow f(x) \in N_\varepsilon(L)) \qquad (۱۶)$$

یعنی به ازای هر همسایگی L مانند N_ε، یک همسایگی p مانند N_δ^* موجود باشد که

$$\forall x \, (x \in N_\delta^* \cap D_f \Longrightarrow f(x) \in N_\varepsilon) \qquad (۱۷)$$

حال همسایگی $+\infty$ و $-\infty$ را تعریف می‌کنیم (D_f یعنی قلمرو f)

۵۰.۴ **تعریف.** به ازای هر عدد حقیقی مانند M، بازه‌ی $(M,+\infty)$ را یک همسایگی (محذوف) $+\infty$ و بازه‌ی $(-\infty,M)$ را یک همسایگی (محذوف) $-\infty$ گوییم.

۵۱.۴ **تعریف.** فرض کنیم p و L متعلق به $\mathbb{R}^*$ باشند گوییم

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

درصورتی که به ازای هر همسایگی L مانند U، یک همسایگی محذوف p مانند V موجود باشد به طوری که

$$\forall x\,(x \in V \cap D_f \Longrightarrow f(x) \in U) \qquad (۱۸)$$

ملاحظه می‌کنیم رابطه‌ی (۱۸) درصورتی که a و L اعداد حقیقی باشند همان (۱۵) یا (۱۶) است، درغیر این صورت، مثلاً در حالت $a = +\infty$ و $L \in \mathbb{R}$ رابطه‌ی (۱۸) تبدیل می‌شود به

$$\forall \varepsilon\, \exists M\, \forall x\,(x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

یا در حالتی که $a \in \mathbb{R}$ و $L = +\infty$، تبدیل می‌شود به

$$\forall M > ۰\, \exists \delta\, \forall x\,(۰ < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M)$$

سایر موارد را می‌توان به طریق مشابه بیان کرد.

مثال. نشان دهید $\lim_{x\to ۱^+} \frac{(-۱)^{[x]}}{x-۱} = -\infty$، نشان می‌دهیم

$$\forall M > ۰\, \exists \delta\, \forall x\,(۱ < x < ۱ + \delta \Longrightarrow \tfrac{(-۱)^{[x]}}{x-۱} < -M)$$

حل. $M > ۰$ را دلخواه می‌گیریم فرض کنید $۱ < x < ۲$ $(\delta_۱ = ۱)$ دراین صورت

$$\begin{aligned} \tfrac{(-۱)^{[x]}}{x-۱} = \tfrac{-۱}{x-۱} < -M \quad &\Longleftrightarrow \tfrac{۱}{x-۱} > +M \\ &\Longleftrightarrow x - ۱ < +\tfrac{۱}{M} \\ &\Longleftrightarrow x < ۱ + \tfrac{۱}{M} \end{aligned}$$

پس اگر $\delta = \min\{۱, \frac{۱}{M}\}$ انتخاب شود حکم برقرار خواهد شد. مشابه قضیه‌ی ۸.۴. یعنی قضیه‌ی حد مجموع یا حد حاصلضرب و یا حد خارج قسمت باز هم برقرار هست فقط توجه کنید که همه‌ی روابط ذکر شده باید بامعنی باشند. عبارت‌های $\infty - \infty$، $۰ \cdot \infty$، $\frac{\infty}{\infty}$، $\frac{A}{۰}$ و $\frac{۰}{۰}$ بامعنی نیستند.

۵۲.۴ **قضیه.** فرض کنید f و g توابع حقیقی با قلمرو E باشند و

$$\lim_{x\to p} f(x) = A\,,\ \lim_{x\to p} g(x) = B$$

دراین صورت به شرط بامعنی بودن طرف‌های دوم، داریم

$$\lim_{x\to p}[f(x) + g(x)] = A + B \quad (۱)$$

(ب) $\lim_{x\to p} f(x)\times g(x) = A.B$

(پ) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

توابع محدّب

۵۳.۴ **تعریف.** تابع حقیقی تعریف شده در (a,b) را محدب خوانیم هرگاه به ازای هر x، y از (a,b)، و هر $۰ \le \lambda \le ۱$، داشته باشیم

$$f(\lambda x + (۱-\lambda)x) \le \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y)$$

مثلاً تابع $f(x) = x^۲$ یا $f(x) = \frac{۱}{x}$ در $(۰,\infty)$ محدب هستند. به صورت هندسی اگر تابعی محدب باشد آنگاه به ازای هر دو نقطه مانند A و B از نمودار تابع، همواره نمودار بین آن دو نقطه، پایین وتر AB قرار می‌گیرد پیوستگی توابع محدب و رابطه‌ی آن با مشتق پذیری را در تمرینهای ۲۰ الی ۲۲ از ۵۴.۴ و تمرین ۷ از ۳۲.۵ خواهیم دید.

۵۴.۴ تمرین

۱) فرض کنید f تابعی پیوسته بر فضای متری X بتوی متری Y و E زیر مجموعه‌ی چگالی از X باشد. ثابت کنید $f(E)$ در $f(X)$ چگال است.

۲) فرض کنید f و g توابع پیوسته بر فضای متری X بتوی Y باشند و E زیر مجموعه‌ی چگالی از X باشد ثابت کنید اگر f و g در E برابر باشند آنگاه f و g در X برابر هستند.

۳) فرض کنید f تابع حقیقی بر R باشد به طوری که به ازای هر x، y،

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱۹)$$

و نیز فرض کنید f حداقل در یک نقطه پیوسته است. نشان دهید

(آ) f در R پیوسته است.

(ب) عددی مانند c موجود است که

$$\forall x\,(f(x) = cx)$$

(پ) آیا تابع ناپیوسته‌ای موجود است که در (۱۹) صدق کند.

۴) فرض کنیم $f : [a,b] \to R$ تابعی کراندار باشد، به ازای هر $\varnothing \neq E \subseteq [a,b]$ نوسان f در E را عدد زیر تعریف می‌کنیم

$$\Omega_f(E) = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in E\}$$

(آ) نشان دهید

$$۰ \leq \Omega_f(E) \leq ۲ \sup_{x \in E} |f(x)|$$

(ب) هرگاه $\varnothing \neq E \subseteq S \subseteq [a,b]$، آنگاه

$$\Omega_f(E) \leq \Omega_f(S)$$

(پ) به ازای هر $x \in [a,b]$، نوسان f در x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$w_f(x) = \inf_{\delta > ۰} \Omega_f(N_\delta(x))$$

نشان دهید $w_f(x) = \lim_{\delta \to ۰^+} \Omega_f(N_\delta(x))$

(ت) نشان دهید f در x پیوسته است اگر و تنها اگر $w_f(x) = ۰$

(ث) در صورتی که در نقطه‌ای مانند C، $f(C+)$ و $f(C-)$ هر دو موجود باشند مقدار $w_f(C)$ را محاسبه کنید

۵) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای پیوستگی $f : X \to Y$ آن است که به ازای هر $B \subseteq Y$،

$$f^{-۱}(B^\circ) \subseteq (f^{-۱}(B))^\circ$$

۶) نشان دهید $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر زیر مجموعه‌ی فشرده $A \subseteq X$، تحدید f بر A پیوسته باشد.

۷) فرض کنید f تابعی حقیقی به طوریکنواخت پیوسته بر مجموعه‌ی کراندار $E \subseteq R$ باشد نشان دهید f کراندار است با مثال نشان دهید که اگر E کراندار نباشد ممکن است نتیجه برقرار نشود.

۸) تابع $f : X \to Y$ را باز گویند هر گاه به ازای هر مجموعه‌ی باز مانند $E \subseteq X$، $f(E)$ در Y باز باشد
ثابت کنید هر تابع باز و پیوسته از R به R یکنواست.

۹) ثابت کنید مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های نوع اول هر تابع حقیقی بر (a, b) حداکثر شمارش پذیر است.

۱۰) فرض کنید A زیر مجموعه‌ای ناتهی از فضای متری X باشد فاصله‌ی نقطه‌ی $x \in X$ از A را (۶۵.۲) به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

(آ) ثابت کنید $d(x, A) = ۰$ اگر و تنها اگر $x \in \overline{A}$.

(ب) تابع $f : X \to R$ را با ضابطه‌ی $f(x) = d(x, A)$ در نظر بگیرید. ثابت کنید f بر X به طور یکنواخت پیوسته است.

۱۱) فرض کنید f تابعی صعودی بر $[\alpha, \beta]$ بوده و E مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های f در $[\alpha, \beta]$ باشد یعنی

$$E = \{x : f(x-) < f(x+)\}$$

(آ) نشان دهید به ازای هر $x \in E$،

$$w_f(x) = f(x+) - f(x-)$$

(ب) نشان دهید به ازای هر n، مجموعه‌ی

$$A_n = \{x : w_f(x) \geq \frac{۱}{n}\}$$

یک مجموعه‌ی متناهی است. (پ) نشان دهید مجموعه‌ی ناپیوستگی‌های f بر بازه‌ای مانند (a, b) حداکثر شمارش پذیر است توجه کنید که در این تمرین، هدف ارائه‌ی برهان دیگری برای قضیه‌ی ۴۸.۴ می‌باشد.

راهنمایی : هر بازه‌ی باز را می‌توان به صورت اجتماع شمارش پذیر از بازه‌های بسته نوشت مثلاً می‌توان نوشت

$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$

۱۲) فرض کنید f بر $[a,b]$ یک به یک و پیوسته باشد نشان دهید f بر $[a,b]$ یکنوای اکید است.

۱۳) فرض کنید f تابعی حقیقی بر (a,b) باشد که در خاصیت میانی صدق کند نشان دهید f ناپیوستگی ساده ندارد.

۱۴) فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \begin{cases} a & , x = a \\ \max_{a \le t \le x} f(t) & , a < x \le b \end{cases}$$

نشان دهید g بر $[a,b]$ پیوسته است.

۱۵) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و

$$A = \{(x,y) : y < f(x)\}\,,\ B = \{(x,y) : y > f(x)\}$$

ثابت کنید f پیوسته است اگر و تنها اگر A و B هر دو در $\mathbb{R}^2$ باز باشند

۱۶) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با قلمرو E باشد و فرض کنید E فشرده باشد و

$$C = \{(x, f(x)) : x \in E\}$$

ثابت کنید f بر E پیوسته است اگر و تنها اگر C فشرده باشد.

۱۷) نشان دهید در تمرین ۹ از ۳۳.۴، پیوستگی یکنواخت یک شرط لازم است.

۱۸) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در خاصیت میانی صدق کند و به ازای هر $r \in Q$ مجموعه‌ی $A_r = \{x : f(x) = r\}$ بسته باشد ثابت کنید f پیوسته است.

۱۹) فرض کنید K و F زیر مجموعه‌های از هم جدا در فضای متری X باشند، و K فشرده و F بسته باشد نشان دهید عددی مانند $\delta > 0$ موجود است به طوری که به ازای هر $p \in K$ و هر $q \in F$،

$$d(p,q) \ge \delta$$

[راهنمایی : تابع $f(x) = d(x,F)$ بر K پیوسته و مثبت است]

۲۰) نشان دهید شرط لازم و کافی برای آن که تابع f در (a,b) محدب باشد آن است که به ازای هر s، t و u که $a<s<t<u<b$،

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

۲۱) اگر f بر (a,b) محدب باشد آنگاه f در هر بازه‌ی بسته $[c,d] \subseteq (a,b)$ در شرط لیپشیتز صدق می‌کند یعنی $k>0$ای هست که به ازای هر x و y از $[c,d]$،

$$|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$$

۲۲) اگر f بر (a,b) محدب باشد آنگاه پیوسته است. (اگر f بر (a,b) محدب باشد لازم نیست f در a از راست و در b از چپ پیوسته باشد.)

فصل ۵

مشتق گیری

در این فصل، ابتدا مشتق توابع حقیقی را تعریف کرده و به خواص آن‌ها خواهیم پرداخت. در بخش‌های پایانی با مشتق توابع برداری آشنا خواهیم شد. معمولاً ظهور مشتق را اغلب منابع به یافتن خط مماس بر منحنی‌ها ارتباط می دهند. امّا به طور کلی در هر علمی که تغییر و حرکت و بالاخره نسبت تغییرات در آن مورد نیاز باشد پیدایش مشتق دور از انتظار نیست. در حقیقت، مدل تابع رابطه‌ای بین متغیرهاست و نسبت تغییرات تابع به متغیر به ظهور مشتق منجر می شود. با این فرض که در ریاضیات عمومی با مفاهیم و کاربردهای اوّلیه‌ی مشتق آشنا شده ایم بیشتر به مطالب تکمیلی خواهیم پرداخت.

۱.۵ **تعریف.** فرض کنید f تابع حقیقی باشد که بر بازه‌ی (a,b) تعریف شده باشد و $c \in (a,b)$ گوییم تابع f در نقطه‌ی c مشتق پذیر است هر گاه حد

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (۱)$$

موجود و متناهی باشد (یعنی $+\infty$ و $-\infty$ نباشد) مقدار حد را در صورت وجود با $f'(c)$ نشان داده و آن را مشتق f در c خوانیم.

در صورتی که f در هر نقطه از $E \subseteq (a,b)$ مشتق پذیر باشد گوییم f در E مشتق پذیر است.

در صورتی که f در E مشتق پذیر باشد، به ازای هر x مقداری به دست می آید که با $f'(x)$ نشان دادیم. به دین طریق تابعی بر E پیدا می شود که مقدار آن در هر $x \in E$ برابر $f'(x)$ است. این تابع را تابع مشتق نامیده و با علامت f' نشان خواهیم داد. توجه

کنید قلمرو f' دقیقاً نقاطی است که f در آن‌ها مشتق پذیر است.

۲.۵ مثال ۱. فرض کنید $f(x) = [x]$، در این صورت قلمرو f' برابر $\mathbb{R} - I$ است و $f' = ۰$.

هر گاه در رابطه‌ی (۱) حد راست و حد چپ را در نظر بگیریم. مشتق راست و چپ در c به دست می آید که به ترتیب با علامت‌های $f'_+(c)$ و $f'_-(c)$ نشان خواهیم داد در تابع $f(x) = [x]$. $f'_+(۱) = ۰$, $f'_-(۱) = +\infty$ یعنی در نقطه‌ی $x = ۱$، مشتق راست موجود است ولی مشتق چپ موجود نیست. ملاحظه می کنیم که $f'(c)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(c)$ و $f'_-(c)$ هر دو موجود و برابر باشند f را در $[a, b]$ مشتق پذیر خوانیم در صورتی که در هر نقطه‌ی درونی مشتق پذیر بوده و $f'_-(b)$، $f'_+(a)$ موجود باشد.

در این کتاب، $f'(c+)$ و $f'(c-)$ را به معنی حد راست و حد چپ تابع f' در نقطه‌ی c خواهیم گرفت که هیچ رابطه‌ای با وجود $f'(c)$ ندارد.

مثلاً در تابع $f(x) = [x]$، در هر نقطه‌ای $f'(c+) = f'(c-) = ۰$.

مثال ۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ \sin \frac{۱}{x} & , x \neq ۰ \\ ۰ & , x = ۰ \end{cases}$$

در نقطه‌ی $x = ۰$، $f'(۰) = ۰$، پس $f'_+(۰) = f'_-(۰)$، در حالی که $f'(۰+)$ و $f'(۰-)$ موجود نیستند.

۳.۵ توجه. هرگاه حد (۱) برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، و علاوه بر آن f در c پیوسته نیز باشد. برخی از مؤلفین f را در c مشتق پذیر نامیده اند مانند

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & , x < ۰ \end{cases}$$

که $g'(۰) = +\infty$. در این کتاب فقط در صورتی که مقدار حد (۱) برابر یک عدد حقیقی باشد f را مشتق پذیر خواهم گفت.

با توجه به قضیه‌ی ٦.۴، شرط لازم و کافی برای مشتق پذیری تابع f در نقطه‌ای مانند c آن است که به ازای هر دنباله مانند x_n که $x_n \neq c$ و $x_n \to c$، حد

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}$$

موجود و مستقل از انتخاب x_n باشد.

۴.۵ مثال. نشان دهید تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ,x\in\mathbb{Q} \\ -x^{۲} & ,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

فقط در $x=۰$ مشتق پذیر است.

حل. فرض کنیم x_n دنباله‌ی دلخواهی باشد که $x_n\to ۰$. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(۰)}{x_n-۰}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pm x_n^{۲}}{x_n}=۰$$

پس $f'(۰)=۰$. نشان می دهیم در نقاط دیگر تابع مشتق پذیر نیست. فرض کنید $c\neq ۰$ و $c\in\mathbb{Q}$ (در حالت $c\notin\mathbb{Q}$ استدلال مشابه را می توان اعمال کرد)
چون c نقطه‌ی حدی اعداد گنگ است پس دنباله‌ای مانند $x_n\in\mathbb{Q}^c$ موجود است به طوری که $x_n\to c$، در این صورت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x_n^{۲}-c^{۲}}{x_n-c}=\pm\infty$$

پس $f'(c)$ موجود نیست.

در این بخش معادلی برای تعریف مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه معرفی می کنیم. فرض کنید f در یک همسایگی نقطه‌ی c تعریف شده و در c مشتق پذیر باشد. فرض کنید

$$g(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c),\quad x\neq c$$

در این صورت، $g(x)\to ۰\iff x\to c$ یا

$$f(x)-f(c)=f'(c)(x-c)+g(x)(x-c) \qquad (۲)$$

که در آن $x\to c\iff g(x)\to ۰$.

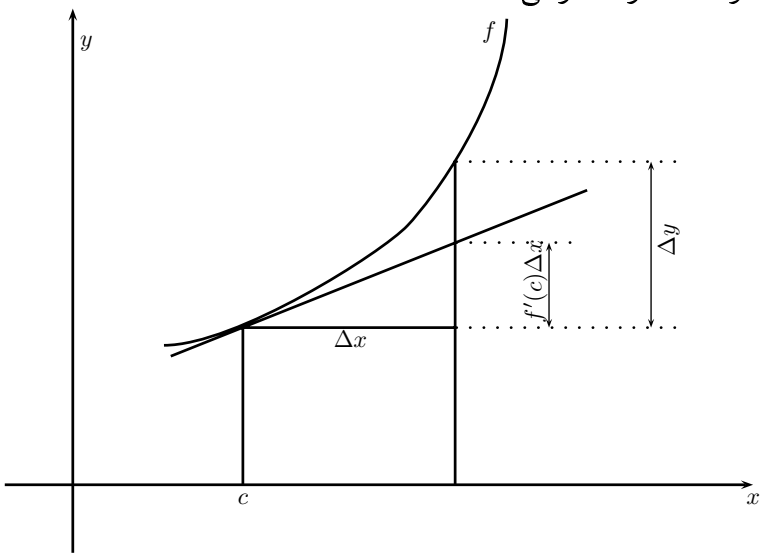
رابطه‌ی (۲) به ازای هر $x\neq c$ برقرار است و g تابعی پیوسته است. در صورتی که فرض کنیم $g(c)=۰$، تابع g در هر نقطه‌ای پیوسته می شود و رابطه‌ی (۲) به ازای هر x از جمله $x=c$ نیز برقرار می شود با توجه به رابطه‌ی (۲) می توان گفت :
f در نقطه‌ی c مشتق پذیر است هر گاه عدی مانند L موجود باشد به طوری که

$$f(x)=f(c)+L.(x-c)+g(x)(x-c) \qquad (۳)$$

که در آن، $g(x)\to ۰\iff x\to c$. عدد L را مشتق f در c خوانیم. هر گاه قرار دهیم $\Delta y=f(x)-f(c)$، $\Delta x=x-c$، آنگاه از رابطه‌ی (۲) نتیجه می شود

$$\Delta y = f'(c)\Delta x + g(x)\Delta x \qquad (۴)$$

که در آن $g(x) \to ۰ \iff \Delta x \to ۰$.
عبارت $f'(c)\Delta x$ را قسمت خطی Δy و $g(x)\Delta x$ را مانده گویند و در مسائل مربوط به تقریب از مانده صرف نظر می کنند.



رابطه‌ی مشتق پذیری و پیوستگی

۵.۵ قضیه. هر گاه f در c مشتق پذیر باشد، آنگاه در c پیوسته است.
برهان.

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c)$$

با حد گیری از رابطه‌ی فوق وقتی که $x \to c$، نتیجه می شود $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
می‌توان بدین طریق نیز استدلال کرد:
چون f در c مشتق پذیر است پس رابطه‌ی (۳) برقرار است با حدگیری نتیجه می شود

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

عکس قضیه‌ی فوق برقرار نیست مانند تابع $f(x) = |x|$ یا به طور کلی هر تابعی که در نمودار آن شکستگی موجود باشد در آن نقاط مشتق پذیر نخواهد شد.

تصور تابعی بر $\mathbb{R}$ که در تمام نقاط پیوسته ولی در هیچ نقطه‌ای مشتق پذیر نباشد قدری مشکل است چنین توابعی موجود می باشند امّا در حال حاضر اطلاعات کافی برای معرفی چنان توابع نداریم. در قسمت سری‌های توابع، آن توابع معرفی خواهند شد.

اعمال جبری روی مشتق

۶.۵ قضیه. فرض کنیم f و g بر $[a,b]$ تعریف شده و در نقطه‌ی $c \in [a,b]$ مشتق پذیر باشند. در این صورت $f+g$، αf $(\alpha \in \mathbb{R})$، fg و f/g (با شرط $g'(c) \neq 0$) در c مشتق پذیرند و

(آ) $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(ب) $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$، α یک ثابت است

(پ) $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(ت) $(\frac{f}{g})'(c) = \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g^2(c)}$

برهان. قسمتهای (پ) و (ت) را ثابت کرده و بقیه را به عنوان تمرین واگذار می کنیم: هر گاه $x \to c$ ، آنگاه حکم (پ) از اتحاد زیر نتیجه می شود.

$$\frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x-c} = g(x)\frac{f(x)-f(c)}{x-c} + f(c)\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

برای اثبات (ت)، قرار دهید $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، $\Delta x = x - c$،

$$\Delta f = f(x) - f(c)\,,\ \Delta g = g(x) - g(c)\,,\ \Delta h = h(x) - h(c)$$

بر طبق تعریف داریم :

$$\begin{aligned} h'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g} - \frac{f}{g}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g - f \cdot \Delta g}{\Delta x (g+\Delta g) g} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(g+\Delta g)g}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot g - f \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

چون $\Delta g \to 0$ پس

$$h' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

صعود یا نزول در یک نقطه

۷.۵ قضیه. فرض کنید f در نقطه‌ی c مشتق پذیر باشد در این صورت
(آ) اگر $f'(c) > ۰$ آنگاه f در c صعودی است یعنی یک همسایگی c موجود است که در آن

$$x_۱ < c < x_۲ \Longrightarrow f(x_۱) < f(c) < f(x_۲)$$

(ب) اگر $f(c) < ۰$ آنگاه f در c نزولی است یعنی یک همسایگی c موجود است که در آن

$$x_۱ < c < x_۲ \Longrightarrow f(x_۱) > f(c) > f(x_۲)$$

برهان (آ) با انتخاب $\varepsilon = \frac{۱}{۲}f'(c)$. عددی مانند $\delta > ۰$ موجود است

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow \frac{۱}{۲}f'(c) < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < \frac{۳}{۲}f'(c)$$

حکم از نامساوی فوق به دست آید. (ب) را نیز می توان به طریق مشابه ثابت کرد.
به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی مقدار میانگین در ۱۴.۵ ثابت خواهیم کرد که، اگر مشتق در بازه‌ای مثبت باشد f در آن بازه صعودی است در این مرحله صعود و نزول در یک نقطه را نشان دادیم.

قاعده‌ی زنجیره‌ای

در این بخش مشتق گیری از تابع مرکب را که به قاعده‌ی زنجیره‌ای معروف است یاد می گیریم.

۸.۵ قضیه. فرض کنیم f بر $[a, b]$ و g بر بازه‌ی I که شامل برد f است تعریف شده باشند هرگاه f در $c \in [a, b]$ و g در $f(c)$ مشتق پذیر باشند آنگاه تابع $h = g \circ f$ در c مشتق پذیر است و

$$h'(c) = g'(f(c))f'(c)$$

برهان. قرار می دهیم $y = f(x)$، $y_۰ = f(c)$، چون g در $y_۰$ مشتق پذیر است، پس بنا بر (۳)، تابعی مانند $u(y)$ موجود است به طوری که

$$g(y) - g(y_۰) = g'(y_۰)(y - y_۰) + u(y)(y - y_۰)$$

که در آن، $y \to y_\circ \iff u(y) \to \circ$.
به ازای هر $x \neq c$،

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(c)}{x-c} &= \frac{g(f(x))-g(f(c))}{x-x_\circ}\\ &= \frac{g(y)-g(y_\circ)}{x-c}\\ &= [g'(y_\circ)+u(y)]\times\frac{y-y_\circ}{x-c}\end{aligned}$$

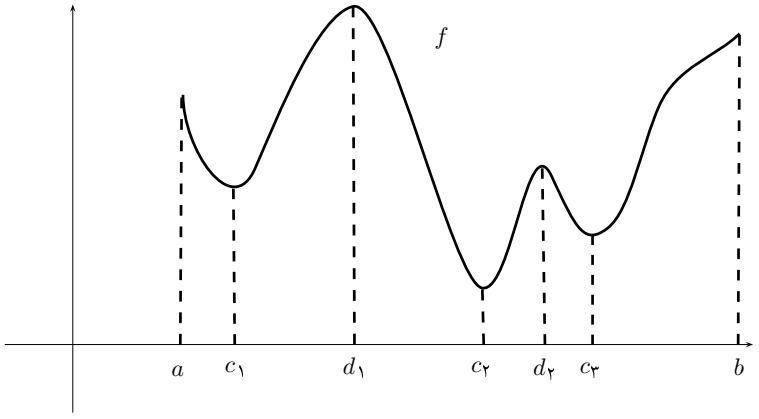
حال اگر $x \to c$ آنگاه $y \to y_\circ$، در نتیجه $u(y) \to \circ$، پس

$$h'(c) = g'(y_\circ)f'(c)$$

۹.۵ **تعریف.** گوییم تابع حقیقی f در c دارای ماکزیمم موضعی است هر گاه

$$\exists\delta\,\forall x\,(|x-c|<\delta \quad \& \quad x\in D_g \Longrightarrow f(x)\le f(c)) \qquad (۵)$$

مینیمم موضعی نیز به طریق مشابه تعریف می شود. به شکل زیر توجه کنید.



f در $c_۱$، $c_۲$، $c_۳$ دارای مینیمم موضعی و در a، $d_۱$، $d_۲$، b دارای ماکزیمم موضعی است.
قضیه‌ی زیر نشان می دهد که در ماکزیمم و مینیمم‌های درونی به شرط مشتق پذیری،

مشتق برابر صفر است. در ابتدا و انتهای قلمرو، که درتوابع پیوسته همواره ماکزیمم یا مینیمم است ممکن است مشتق صفر نباشد.

۱۰.۵ قضیه. فرض کنیم f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. هر گاه f در نقطه‌ی درونی c، یعنی $c \in (a,b)$، دارای ماکزیمم موضعی باشد و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c) = ۰$. قضیه‌ی مشابه برای مینیمم موضعی برقرار است.

برهان. چون f در c، دارای ماکزیمم موضعی است پس $\delta > ۰$ ای موجود است که

$$\forall x\,(a < c-\delta < x < c+\delta < b \Longrightarrow f(x) \le f(c))$$

بنا بر این به ازای هر x که $c < x < c+\delta$، داریم

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le ۰$$

حال اگر $x \to c^+$، نتیجه می شود $f'(c) \le ۰$ همچنین به ازای هر x که $c-\delta < x < c$، داریم

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge ۰$$

هرگاه $x \to c^-$، نتیجه می شود $f'(c) \ge ۰$. پس $f'(c) = ۰$.

عکس قضیه‌ی فوق برقرار نیست، یعنی ممکن است در نقطه‌ای مشتق صفر باشد ولی تابع در آن نقطه دارای ماکزیمم یا مینیمم نباشد مانند توابع $f(x) = x^۳$ یا $g(x) = x + \sin x$. در هر صورت اگر تابعی مشتق پذیر باشد با استفاده از قضیه‌ی فوق می توان کلیه‌ی ماکزیمم‌ها و یا مینیمم را پیدا کرد.

*۱۱.۵مثال. نشان دهید اگر $۰ \le x \le \frac{\pi}{۲}$ آنگاه

$$\tfrac{۲}{\pi}x \le \sin x \le x$$

قرار می دهیم $f(x) = \sin x - \frac{۲}{\pi}x$، در این صورت

$$f'(x) = \cos x - \tfrac{۲}{\pi} = ۰ \Longrightarrow x = \cos^{-۱}\tfrac{۲}{\pi}$$

بنا بر این مشتق f فقط در یک نقطه‌ی درونی صفر شد،

$$f''(x) = -\sin x \le ۰$$

چون مشتق دوم منفی است پس تقعر[۱] منحنی رو به پایین است درنتیجه نقطه‌ی فوق یک ماکزیمم موضعی است چون تنها ماکزیمم موضعی است پس ماکزیمم مطلق نیز است. به دلیل پیوستگی، f دارای مینیمم نیز است. چون در درون $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ مینیمم ندارد، بنا بر این ابتدا و انتها هر دو مینیمم موضعی هستند، مقدار تابع در ابتدا و انتها برابر صفر است. در نتیجه مینیمم مطلق تابع صفر است پس به ازای هر $x \in [۰, \frac{\pi}{۲}]$،

[۱] نشان خواهیم داد که اگر در نقطه‌ای مشتق دوم مثبت باشد تقعر به بالا و اگر در نقطه‌ای مشتق دوم منفی باشد تقعر رو به پایین است.

$f(x) \geq ۰ \Longrightarrow \sin x - \frac{۲}{\pi}x \geq ۰$

هر گاه قرار دهیم $g(x) = x - \sin x$، آنگاه $g'(x) = ۱ - \cos x \geq ۰$ پس g تابعی صعودی است (در ۱۴.۵ ثابت خواهیم کرد) پس مینیمم مطلق g در ابتدا است $g(۰) = ۰$، درنتیجه به ازای هر x،

$$g(x) \geq ۰ \Longrightarrow x - \sin x \geq ۰$$

در صورتی که $-\frac{\pi}{۲} \leq x \leq ۰$،چون $۰ \leq -x \leq \frac{\pi}{۲}$، پس

$\frac{۲}{\pi}(-x) \leq \sin(-x) \leq (-x)$

در نتیجه اگر $۰ \leq |x| \leq \frac{\pi}{۲}$، آنگاه $\frac{۲}{\pi}|x| \leq |\sin x| \leq |x|$.

تمرین. نشان دهید اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه

$\tan x + \sin x > ۲x \quad , \quad \frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$

قضیه‌ی زیر به قضیه‌ی مقدار میانگین تعمیم یافته معروف است.

۱۲.۵ قضیه. فرض کنیم f و g توابع پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق پذیر بر (a,b) باشند در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) \qquad (۶)$$

برهان. تابع h را بر $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$

دراین صورت تابع h بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر است و $h(a) = h(b)$ همچنین به دلیل پیوستگی، h در $[a,b]$ دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق می باشد برای اثبات قضیه کافی است نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ پیدا کنیم که $h'(c) = ۰$.

اگر h تابع ثابتی باشد یعنی به ازای هر x، $h(x) = h(a)$ آنگاه $h' = ۰$، پس حکم برقرار می شود.

فرض کنید h تابع ثابتی نباشد یعنی نقطه‌ای مانند $x_۱ \in [a,b]$ موجود باشد که $h(x_۱) \neq h(a)$ دو حالت اتفاق می افتد.

(آ) $h(x_۱) > h(a) = h(b)$، در این حالت $h(a)$ و $h(b)$ نمی توانند ماکزیمم h باشند پس h در نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ دارای ماکزیمم مطلق است در نتیجه $h'(c) = ۰$.

(ب) در صورتی که $h(x_۱) < h(a) = h(b)$، c را نقطه‌ای می گیریم که h در آن به مینیمم مطلق خود می رسد در نتیجه $h'(c) = ۰$.

قضیه‌ی زیر به قضیه‌ی مقدار میانگین معروف است که نتیجه‌ای از ۱۲.۵ می باشد.

۱۳.۵ قضیه. (مقدار میانگین) فرض کنیم f تابع حقیقی پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق پذیر بر (a,b) باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \qquad (۷)$$

برهان. فرض کنید $g(x) = x$. از قضیه‌ی ۱۲.۵ استفاده کنید.
هر گاه به مفروضات قضیه‌ی ۱۳.۵، فرض $f(a) = f(b)$ نیز افزوده شد، نتیجه می شود

$$\exists c\,(c \in (a,b) \quad \& \quad f'(c) = ۰)$$

این نتیجه، به قضیه‌ی رُل معروف است.

۱۴.۵ قضیه. فرض کنید f در (a,b) مشتق پذیر باشد، در این صورت

(آ) اگر به ازای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) \geq ۰$، آنگاه f صعودی است.

(ب) اگر به ازای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) = ۰$، آنگاه f ثابت است.

(پ) اگر به ازای هر $x \in (a,b)$، $f'(x) \leq ۰$، آنگاه f نزولی است.

برهان. به ازای هر $x_۱$، $x_۲$ از (a,b) که $x_۱ < x_۲$، بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین در بازه‌ی $[x_۱, x_۲]$، نقطه‌ای مانند $c \in (x_۱, x_۲)$ موجود است به طوری که

$$f(x_۲) - f(x_۱) = f'(c)(x_۲ - x_۱)$$

حال هر سه حکم را می توان از رابطه‌ی فوق به دست آورد.

پیوستگی تابع مشتق

فرض کنید f تابعی مشتق پذیر بر (a,b) باشد، پس تابع f' بر (a,b) تعریف شده است در قضیه‌ی زیر نشان می دهیم که تابع f' در خاصیت میانی صدق می کند. در قضیه‌ی ۲۴.۴ دیدیم که توابع پیوسته نیز در خاصیت میانی صدق می کنند. توجه کنید که تابع f' ممکن است پیوسته نباشد.

۱۵.۵ قضیه. فرض کنیم f بر $[a,b]$ مشتق پذیر باشد و $f'(a) < \lambda < f'(b)$. در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ موجود است که $f'(c) = \lambda$. هر گاه $f'(a) > f'(b)$، نتیجه‌ی مشابهی برقرار است.

برهان. تابع g بر $[a,b]$ را با ضابطه‌ی $g(x) = f(x) - \lambda x$ تعریف می کنیم در این صورت $g'(x) = f'(x) - \lambda$.
چون $g'(a) < ۰$ پس تابع g از $g(a)$ شروع به نزول می کند در نتیجه $g(a)$ مینیمم مطلق g نیست و چون $g'(b) > ۰$ پس تابع g صعود کرده و به $g(b)$ می رسد و در

نتیجه $g(b)$ مینیمم مطلق g نیست پس مینیمم مطلق g در نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ است در نتیجه

$$g'(c) = ۰ \Longrightarrow f'(c) = \lambda$$

در تمرین ۱۳ از ۵۴.۴ دیدیم هر تابعی که در خاصیت میانی صدق کند ناپیوستگی ساده ندارد امّا ممکن است ناپیوستگی نوع دوم داشته باشد بنابراین،

۱۶.۵ قضیه. هرگاه f بر $[a,b]$ مشتق پذیر باشد آنگاه f' بر $[a,b]$ ناپیوستگی ساده ندارد.

قاعده‌ی هوپیتال

در این بخش صورتهای مختلف قاعده‌ی هوپیتال را بیان و ثابت خواهیم کرد.

۱۷.۵ قضیه. فرض کنیم f و g توابع مشتق پذیر در نقطه‌ی c باشند و $g'(c) \neq ۰$ و $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = ۰$. در این صورت

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

برهان. چون f و g در c پیوسته اند پس $f(c) = g(c) = ۰$، حال می توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \\ &= \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} \end{aligned}$$

هر گاه از رابطه‌ی فوق حد بگیریم وقتی که $x \to c$، به دست می آوریم

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

در این قضیه هر دو تابع در نقطه‌ی c مشتق پذیر بودند در قضیه‌ی زیر این فرض حذف شده است.

۱۸.۵ قضیه. فرض کنیم f و g بر (c,d) مشتق پذیر باشند و $g' \neq 0$ و

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} g(x) = 0$$

در این صورت اگر $\lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$، آنگاه

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

برهان. (طریق اول) تعریف می کنیم $f(c) = g(c) = 0$ به ازای هر $x \in (c,d)$، f و g در بازه‌ی $[c,x]$ در شرایط قضیه‌ی ۱۲.۵ صدق می کنند، پس

$$\exists \alpha_x \, (c < \alpha_x < x \quad \& \quad \tfrac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \tfrac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)})$$

$$\Longrightarrow \tfrac{f(x)}{g(x)} = \tfrac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}$$

هر گاه $x \to c^+$، آنگاه $\alpha_x \to c^+$ درنتیجه $\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

برهان. (طریقه‌ی دوم) $\varepsilon > 0$ را دلخواه می گیریم چون $\lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$، پس عددی مانند $\delta > 0$ موجود است که

$$\forall x \, (c < x < c+\delta \Longrightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \frac{\varepsilon}{2}) \qquad (8)$$

فرض کنیم x دلخواه باشد به طوری که $c < x < c+\delta$، به ازای هر $c < y < x$، f و g در بازه‌ی $[y,x]$ در شرایط قضیه‌ی ۱۲.۵ صدق می‌کنند، پس

$$\exists \alpha \, (y < \alpha < x \quad \& \quad \tfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \tfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)})$$

بنا بر رابطه‌ی (۸)،

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-g(y)}{g(x)-g(y)} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

هر گاه $y \to c^+$، آنگاه

$$L - \varepsilon < L - \tfrac{\varepsilon}{2} \leq \tfrac{f(x)}{g(x)} \leq L + \tfrac{\varepsilon}{2} < L + \varepsilon \, .$$

در این استدلال نیازی به تعریف f و g در c نشد، بنا بر این این استدلال را می‌توان در حالت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ بیان کرد.

حالت‌های دیگر قاعده‌ی هوپیتال را می توان به طریق مشابه بیان کرد. جهت آموزش بیشتر چندین نمونه‌ی دیگر را می آوریم.

۱۹.۵ قضیه. فرض کنیم f و g بر (a,∞) مشتق پذیر باشند و $g' \neq 0$ و

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = ۰$$

در این صورت اگر $L \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ آنگاه

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

برهان. $\varepsilon > ۰$ را دلخواه می‌گیریم. چون $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ پس عددی مانند $M > ۰$ موجود است که

$$\forall x\,(x > M \Longrightarrow L - \frac{\varepsilon}{۲} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \frac{\varepsilon}{۲}) \qquad (۹)$$

حال فرض کنید x دلخواه باشد و $x > M$، به ازای هر y که $y > x$، f و g در بازه‌ی $[x, y]$ در شرایط قضیه‌ی ۱۲.۵ صدق می کنند، پس

$$\exists\alpha\,(x < \alpha < y \quad \& \quad \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)})$$

بنا بر رابطه‌ی (۹)

$$L - \tfrac{\varepsilon}{۲} < \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} < L + \tfrac{\varepsilon}{۲}$$

هر گاه $y \to \infty$، آنگاه

$$L - \varepsilon < L - \tfrac{\varepsilon}{۲} \le \tfrac{f(x)}{g(x} \le L + \tfrac{\varepsilon}{۲} < L + \varepsilon$$

قضایای فوق به قاعده‌ی هوپیتال در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ معروف هستند قضایای مشابه را در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ می توان بیان کرد. در صورتی که در کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$، مخرج به سمت $\pm\infty$ میل کند وجود و مقدار حد صورت در نتیجه‌ی قضیه بی تأثیر است. یک نمونه از قاعده‌ی هوپیتال را در این حالت بیان و ثابت می کنیم.

۲۰.۵ قضیه. فرض کنیم f و g توابع مشتق پذیر بر (a, b) باشند، $g' \neq ۰$، و $\lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$. در این صورت اگر $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$، آنگاه

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

برهان. $\varepsilon > ۰$ را دلخواه می گیریم چون $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$ پس $\delta_۱ > ۰$ای موجود است که به ازای هر x

$$b - \delta_۱ < x < b \Longrightarrow L - \frac{\varepsilon}{۲} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۱۰)$$

حال c را از $(b-\delta_۱, b)$ در نظر بگیرید، به ازای هر x که $c<x<b$، بنا بر قضیه‌ی ۱۲.۵، نقطه‌ای مانند $t \in (c,x)$ موجود است به طوری که

$$[f(x)-f(c)]g'(t) = [g(x)-g(c)]f'(t)$$

و یا

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(x)} = [\,۱ - \frac{g(c)}{g(x)}] \times \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

و یا

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} + \frac{۱}{g(x)}[f(c) - g(c)\frac{f'(t)}{g'(t)}] \qquad (۱۱)$$

چون $g(x) \to \infty$ پس $g(x)$ را می توان مثبت گرفت. در رابطه‌ی (۱۱) جمله‌ی دوم در سمت چپ را با $h(x)$ نشان می دهیم، چون $\lim_{x\to b^-} h(x) = ۰$، پس عددی مانند $\delta_۲ > ۰$ موجود است به طوری که به ازای هر x،

$$b-\delta_۲ < x < b \Longrightarrow -\frac{\varepsilon}{۲} < h(x) < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۱۲)$$

از روابط (۱۰)، (۱۱)، (۱۲) نتیجه می شود

$$L-\varepsilon < \tfrac{f(x)}{g(x)} < L+\varepsilon\,.$$

تمرین ۱. حد زیر را محاسبه کنید

$\lim_{x\to ۰} \frac{e-(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{x}$

تمرین ۲. تابع زیر در چه نقاطی مشتق پذیر است

$$g(x) = \begin{cases} x^۲|\cos\frac{\pi}{۲x}| & ,\ x \neq ۰ \\ ۰ & ,\ x = ۰ \end{cases}$$

قضیه‌ی تابع معکوس

فرض کنید f تابعی مشتق پذیر باشد و $f^{-۱}$ تابع معکوس f باشد آیا $f^{-۱}$ مشتق پذیر است ؟ مشتق آن را چگونه می توان محاسبه کرد ؟ قضیه‌ی زیر پاسخ سئوالات فوق را می دهد.

۲۱.۵ قضیه. فرض کنیم f بر بازه‌ی I مشتق پذیر باشد و همواره $f'(x) \neq ۰$، در این صورت f یک به یک است و $f^{-۱}$ بر $f(I)$ مشتق پذیر است و به ازای هر x،

$(f^{-۱})'(y) = \frac{۱}{f'(x)}$

در رابطه‌ی فوق $y = f(x)$.

برهان. چون همواره $f'(x) \neq ۰$، بنا بر قضیه‌ی ۱۵.۵ همواره $f'(x) > ۰$ یا همواره $f'(x) < ۰$.

حالت اول. فرض کنید به ازای هر x، $f'(x) > ۰$ پس f تابعی اکیداً صعودی بر I است درنتیجه یک به یک است. از پیوستگی f نتیجه می شود که $f(I)$ یک بازه است و $f^{-۱}$ بر $f(I)$ پیوسته است (۳۴.۴)

نشان می دهیم $f^{-۱}$ مشتق پذیر است. فرض کنیم $y \in f(I)$ و دلخواه باشد. دنباله‌ی دلخواه $\{y_n\}_۱^\infty$ از $f(I)$ را با شرط $y_n \neq y$ و $y_n \to y$ در نظر می گیریم و تعریف می کنیم $x_n = f^{(-۱)}(y_n)$، $x = f^{-۱}(y)$، پیوستگی و یک به یک بودن $f^{-۱}$ نتیجه می دهد که

$$x_n \to x \quad , \quad x_n \neq x$$

چون f در x مشتق پذیر است، پس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x) \neq ۰$$

درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-۱}(y_n) - f^{-۱}(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{۱}{f'(x)}$$

پس $(f^{-۱})'(y) = \frac{۱}{f'(x)}$. حالت $f'(x) < ۰$ را به طریق مشابه می توان ثابت کرد.

۲۲.۵مثال ۱. تابع $f(x) = x^۲$ در بازه‌ی $(۰, \infty)$ در شرط $f'(x) \neq ۰$ صدق می کند معکوس آن، تابع $g(y) = \sqrt{y}$ است ($y = x^۲$).

$$g'(y) = \frac{۱}{f'(x)} = \frac{۱}{۲x} = \frac{۱}{۲\sqrt{y}}$$

مثال ۲. تابع $y = \sin x$ در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ در شرط $f'(x) \neq ۰$ صدق می کند معکوس آن در این بازه، تابع $g(y) = \sin^{-۱} y$ است پس

$$g'(y) = \frac{۱}{f'(x)} = \frac{۱}{\cos x} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^۲ x}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - y^۲}}$$

قضیه‌ی ۲۱.۵ بیان می کند که هر گاه y تابعی مشتق پذیر از x در بازه‌ی I باشد و $y' \neq ۰$، آنگاه x نیز تابعی مشتق پذیر از y است و

$$\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{\frac{dy}{dx}}$$

مشتقات مراتب بالاتر

۲۳.۵ **تعریف.** فرض کنید f بر بازه‌ی I مشتق پذیر باشد و f' نیز بر I مشتق پذیر باشد مشتق f' را با f'' نشان داده و آن را مشتق دوم f می نامیم بدین طریق مشتقات مراتب بالاتر تعریف می شوند به ازای هر عدد طبیعی n، مشتق مرتبه‌ی n ام را با علامت $f^{(n)}$ نشان خواهیم داد و $f^{(0)}$ را مشتق مرتبه‌ی صفرام یعنی خود تابع فرض کنید.
به طور کلی برای این که $f^{(n)}$ در نقطه‌ای مانند c موجود باشد باید $f^{(n-1)}$ در یک همسایگی c موجود باشد و $f^{(n-1)}$ در c مشتق پذیر باشد (در صورتی که c ابتدا یا انتهای بازه‌ای باشد که f در آن تعریف شده باشد منظور از مشتق پذیری یعنی وجود مشتقات یک طرفه است) بنا بر این باید $f^{(n-2)}$ در یک همسایگی c مشتق پذیر باشد.
در این بخش تعمیم دیگری از قضیه‌ی مقدار میانگین را که به قضیه‌ی تیلور معروف است ارائه می دهیم یکی از اهداف مهم قضیه‌ی تیلور، تقریب یک تابع با چند جمله‌ای‌هایی است که در یک نقطه مشتقات آن با مشتقات تابع برابر است فرض کنید مقدار تابع f در نقطه‌ی a معلوم باشد و x نقطه‌ای در نزدیکی a باشد در صورت مشتق پذیری f در بازه‌ی (a,x) یا بازه‌ی (x,a)، بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین، $c \in (a,x)$ موجود است که

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \qquad (۱۳)$$

پس مقدار تقریبی $f(x)$ برابر $f(a)$ است هرگاه در جستجوی مقدار تقریبی مناسبتری برای $f(x)$ باشیم عبارت $f(a) + f'(a)(x-a)$ پیشنهاد می شود در این انتخاب چه میزان خطا اتفاق افتاده است ؟ پاسخ سئوال را قضیه‌ی تیلور از مرتبه‌ی دوم، به صورت زیر بیان می کند:
هرگاه f' در $[a,x]$ پیوسته و f'' در (a,x) موجود باشد آنگاه $c \in (a,x)$ موجود است به طوری که

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{۱}{۲!}f''(c)(x-a)^۲ \qquad (۱۴)$$

و هر گاه f'' در $[a,x]$ پیوسته و f''' در (a,x) موجود باشد آنگاه $c \in (a,x)$ موجود است به طوری که

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{۱}{۲!}f''(a)(x-a)^۲ + \frac{۱}{۳!}f'''(c)(x-a)^۳ \qquad (۱۵)$$

روابط (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) به ترتیب به قضیه‌ی تیلور از مرتبه‌ی ۱، ۲ و ۳ معروف هستند.

رابطه‌ی (۱۳) نشان می دهد که اولین تقریب f در نزدیکی a، خود $f(a)$ است.

رابطه‌ی (۱۳) نشان می دهد که خط مماس در a بهترین تقریب برای f در اطراف a است.

رابطه‌ی (۱۳) نشان می دهد نزدیکترین سهمی به تابع f در همسایگی a، سهمی زیر است.

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$$

یعنی آن سهمی که از نقطه $(a, f(a))$ گذشته و مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم آن در a برابر مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم تابع باشد روند فوق می تواند تا هر مرتبه که f مشتق پذیر باشد ادامه پیدا کند به طور خلاصه می توان گفت قضیه‌ی تیلور، تقریب یک تابع مشتق پذیر با چند جمله‌ای‌هایی است که مشتقات آن‌ها برابر مشتقات خود تابع باشد در صورتی که f فقط پیوسته باشد f را می توان به صورت‌های دیگری تقریب زد، از جمله قضیه‌ی تقریب وایرشتراس است که در فصل‌های بعدی مطرح خواهد شد.

۲۴.۵ قضیه. (تیلور) فرض کنیم f تابعی حقیقی بر $[a, x]$ بوده و n عدد طبیعی باشد $f^{(n-1)}$ بر $[a, x]$ پیوسته باشد و $f^{(n)}$ بر (a, x) موجود باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in (a, x)$ موجود است به طوری که

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-a)^n \qquad (۱۶)$$

این قضیه به ازای $n = 1$ همان قضیه‌ی مقدار میانگین است. آخرین جمله در سمت راست (۱۶) را با $R_n(x)$ نشان داده و آن را مانده خوانیم. با دانستن کران‌های $|f^{(n)}(x)|$ می توان میزان خطا را تخمین زد.

برهان. قرار دهید

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(t-a)^k \quad , \quad a \le t \le x$$

فرض کنیم A عددی باشد که با

$$f(x) = g(x) + A(x-a)^n \qquad (۱۷)$$

تعریف شده باشد تابع h را بر $[a, x]$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$h(t) = f(t) - g(t) - A(t-a)^n \quad , \quad a \le t \le x$$

کافی است نشان دهیم، نقطه‌ای مانند $c \in (a,x)$ موجود است به طوری که $A = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$ ملاحظه می کنیم h دارای خواص زیر است

$$\begin{aligned} h(a) &= h'(a) = \cdots = h^{(n-1)}(a) = 0 \\ h^{(n)}(t) &= f^{(n)}(t) - n!A \quad , \quad (a < t < x) \\ h(x) &= 0 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

چون $h(a) = h(x) = 0$، بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین نقطه‌ای مانند $c_1 \in (a,x)$ موجود است به طوری که $h'(c_1) = 0$، چون $h'(a) = 0$. به همین طریق نتیجه می‌گیریم نقطه‌ای مانند $c_2 \in (a,c_1)$ موجود است به طوری که $h''(c_2) = 0$، پس از n مرحله نقطه‌ای مانند $c_n \in (a,c_{n-1})$ پیدا می کنیم به طوری که $h^{(n)}(c_n) = 0$ یا $f^{(n)}(c_n) = n!A$

۲۵.۵ سری تیلور. هر گاه تابع f از هر مرتبه‌ی مشتق پذیر باشد، آنگاه به ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c_n)(x-a)^n \quad , \quad c_n \in (a,x)$$

اگر در رابطه‌ی فوق جمله‌ی اول را با $S_n(x)$ و جمله‌ی دوم را با $R_n(x)$ نشان دهیم آنگاه در صورتی که $R_n(x) \to 0$ خواهیم داشت

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \tag{۱۹}$$

سری فوق، سری تیلور تابع f در نقطه‌ی a نامیده می شود در صورتی که $a = 0$،

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x)^k \tag{۲۰}$$

رابطه‌ی (۲۰) به سری ماکلورن تابع f معروف است به طور کلی (۱۹) و (۲۰) به ازای هر x که سری‌های طرف دوم همگرا باشند دارای اعتبار است. مطالب تکمیلی در فصل‌های بعدی در مبحث سری‌های توابع مطرح خواهد شد.

تمرین ۱. بسط توابع e^x، $\cos x$، $\sin x$، $\ln(1+x)$ را به سری ماکلورن به دست آورید.

تمرین ۲. با استفاده از قضیه‌ی تیلور نشان دهید

i) $\cos x > ۱ - \frac{x^۲}{۲} \quad , x \in \mathbb{R}$

ii) $x - \frac{x^۳}{۳!} \leq \sin x \leq x \quad , x \geq ۰$

تعیین ماکزیمم و مینیمم به کمک قضیه تیلور

در قضیه‌ی ۱۰.۵ دیدیم که هر گاه f در یک نقطه‌ی درونی بازه‌ی $[a,b]$ دارای ماکزیمم یا مینیمم باشد آنگاه در آن نقطه، به شرط مشتق پذیری، مشتق برابر صفر است عکس مطلب برقرار نیست یعنی ممکن است در نقطه‌ای مانند c، $f'(c) = ۰$ امّا آن نقطه نه ماکزیمم باشد و نه مینیمم باشد قضیه‌ی زیر که در آن از مشتقات مراتب بالاتر استفاده شده در این مورد مفید است.

۲۶.۵ قضیه. فرض کنید $n > ۱$، و تابع f در (a,b)، n مرتبه مشتق پذیر باشد، به علاوه در نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$،

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-۱)}(c) = ۰ \quad , \quad f^{(n)}(c) \neq ۰$$

در این صورت اگر n زوج باشد آنگاه :

(آ) در صورتی که $f^{(n)}(c) > ۰$ تابع f در c دارای یک مینیمم موضعی است.

(ب) در صورتی که $f^{(n)}(c) < ۰$ تابع f در c دارای یک ماکزیمم موضعی است.

امّا اگر n فرد باشد c نه ماکزیمم است و نه مینیمم است.

برهان. ابتدا فرض کنید n زوج باشد و $f^{(n)}(c) > ۰$.

چون $f^{(n)}(c) > ۰$، پس تابع $f^{(n-۱)}(t)$ در c صعود می کند (۷.۵) بنا بر این یک همسایگی c موجود است که در آن

$$\begin{aligned} \alpha < c < \beta \implies & f^{(n-۱)}(\alpha) < f^{(n-۱)}(c) < f^{(n-۱)}(\beta) \\ \implies & f^{(n-۱)}(\alpha) < ۰ < f^{(n-۱)}(\beta) \end{aligned}$$

حال بنا بر قضیه‌ی تیلور تا مرتبه‌ی $(n-۱)$، به ازای هر x ار آن همسایگی داریم

$$f(x) - f(c) = \frac{۱}{(n-۱)!} f^{(n-۱)}(x_۱)(x-c)^{n-۱} \qquad (۲۱)$$

که در آن $x_۱$ نقطه‌ای بین x و c است.

در صورتی که $x > c$، طرف چپ در (۲۱) مثبت است پس $f(x) > f(c)$ ودر صورتی که $x < c$ باز هم طرف چپ در (۲۱) مثبت است پس $f(x) > f(c)$. بنا بر این $f(c)$ یک مینیمم موضعی است.

حالت (ب) به طریق مشابه ثابت می شود.
در صورتی که n فرد باشد علامت عبارت سمت چپ در (۲۱) ثابت نیست پس $f(c)$ نمی تواند ماکزیمم یا مینیمم باشد.

مشتق گیری از توابع برداری

در ۵.۴ مفهوم حد را در فضاهای متری و درنتیجه برای توابع برداری تعریف کردیم. در قضایای ۹.۴ و ۱۰.۴ خواص توابع برداری را بررسی کردیم.

فرض کنید $f = (f_1, \dots, f_k)$ تابع برداری تعریف شده بر $[a, b]$ باشد، مشتق f در نقطه‌ای مانند c را مطابق ۱.۵ تعریف می کنیم، رابطه‌ی

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(c)}{x - c}, \dots, \frac{f_k(x) - f_k(c)}{x - c}\right)$$

قضیه‌ی زیر را ثابت می‌کند.

۲۷.۵ قضیه. شرط لازم و کافی برای آن تابع برداری $f = (f_1, \dots, f_k)$ در نقطه‌ای مانند c مشتق پذیر باشد آن است که توابع f_1، f_2، ...، f_k در آن نقطه مشتق پذیر باشند در این صورت

$$f'(c) = (f_1'(c), \dots, f_k'(c))$$

قضیه‌ی فوق نشان می دهد که هر تابع برداری مشتق پذیر پیوسته نیز است.

۲۸.۵ قضیه. فرض کنیم $f = (f_1, \dots, f_k)$ و $g = (g_1, g_2, \dots, g_k)$ توابع برداری مشتق پذیر بر بازه‌ی I باشند و

$f.g = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) g_i(x)$ (ضرب عددی)

در صورتی که $k \leq 3$، $f \times g$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$f \times g = (f_2 g_3 - g_2 f_3, f_3 g_1 - g_3 f_1, f_1 g_2 - f_2 g_1)$ (ضرب برداری)

در این صورت

(آ) $(f + g)' = f' + g'$

(ب) $(\alpha f)' = \alpha f'$، α یک ثابت است

(پ) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(ت) $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

برهان. استفاده‌ی مکرر از قضیه‌ی ۶.۵ احکام را ثابت می کند.

تعریف مشتق برای توابع مختلط یعنی توابع به صورت $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ مطابق توابع برداری است و برای چنین توابع رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x)$$

قضیه‌ی مشابه ۲۸.۵ برای توابع مختلط برقرار است برای این توابع به جای (پ) و (ت) ضرب توابع مختلط را در نظر بگیرید.

امّا قضیه‌ی مقدار میانگین و نتیجه‌ی مهم آن، یعنی قاعده‌ی هوپیتال در توابع برداری یا توابع مختلط برقرار نیست صورتی از قاعده‌ی هوپیتال را برای توابع مختلط بیان خواهیم کرد. ابتدا به مثال‌های زیر توجه کنید.

۲۹.۵ مثال.

۱) به ازای هر عدد حقیقی تعریف می کنیم

$$f(x) = (\sin x, \cos x)$$

تابع f در $[۰, ۲\pi]$ مشتق پذیر است و

$$f(۲\pi) - f(۰) = (۰, ۱) - (۰, ۱) = (۰, ۰)$$
$$f'(x) = (\cos x, -\sin x)$$

چون $|f'(x)| = ۱$، پس رابطه‌ی

$$f(۲\pi) - f(۰) = f'(x) \times ۲\pi$$

به ازای هیچ x ای برقرار نیست درنتیجه قضیه مقدار میانگین برای توابع مختلط نیز برقرار نیست.

۲) (این مثال از کتاب آنالیز ریاضی رودین اقتباس شده است)
توابع f و g بر $(۰, ۱)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x) = x$$
$$g(x) = x + x^۲(\cos \tfrac{۱}{x^۲} + i \sin \tfrac{۱}{x^۲}) = x + x^۲ e^{i/x^۲}$$

به ازای عدد حقیقی t، $|e^{it}| = ۱$ پس $\lim_{x\to ۰} xe^{i/x^۲} = ۰$، درنتیجه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{۱ + xe^{i/x^۲}} = ۱ \qquad (۲۲)$$

امّا داریم

$$g'(x) = ۱ + (۲x - \frac{۲}{x} i)e^{i/x^۲} \quad , \quad ۰ < x < ۱$$

پس

$$|g'(x)| \geq |۲x - \frac{۲}{x} i| - ۱ = ۲\sqrt{x^۲ + \frac{۱}{x^۲}} - ۱ > \frac{۲}{x} - ۱ = \frac{۲ - x}{x}$$

بنا بر این

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)}| = \frac{۱}{g'(x)} < \frac{x}{۲-x}$$

و در نتیجه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f'(x)}{g'(x)} = ۰ \qquad (۲۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۲۲) و (۲۳) ملاحظه می کنیم که قاعده‌ی هوپیتال در توابع مختلط برقرار نیست. قضیه‌ی زیر مشابه قضیه‌ی مقدار میانگین است و به قضیه‌ی مقدار میانگین در توابع برداری معروف است.

۳۰.۵ **قضیه.** فرض کنیم f تابع برداری پیوسته بر $[a,b]$ و مشتق پذیر بر (a,b) باشد، در این صورت نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(c)|(b-a)$$

برهان. بردار $f(b) - f(a)$ را به A نشان می دهیم و تابع φ بر $[a,b]$ با ضابطه‌ی $\varphi(x) = f(x).A$ تعریف می کنیم، تابع حقیقی φ بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق پذیر است یعنی شرایط مقدار میانگین برقرار است، پس نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) = f'(c).A(b-a)$$

بنا بر تعریف φ، می توان نوشت

$$\varphi(b) - \varphi(a) = f(b).A - f(a).A = A.A = |A|^۲$$

حال با توجه به نامساوی کوشی – شوارتز $(A.B \leq |A||B|)$،

$$|A|^۲ = f'(c).A(b-a) \leq |f'(c)||A|(b-a)$$

و یا

$$|A| \leq |f'(c)|(b-a)$$

قضیه‌ی زیر نتیجه‌ای از قاعده‌ی هوپیتال است که به قاعده‌ی هوپیتال در توابع مختلط معروف است.

۳۱.۵ **قضیه.** فرض کنیم f و g توابع مختلط مشتق پذیری بر (a,b) باشند و

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = ۰$$

در این صورت اگر $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A$ و $\lim_{x\to a^+} g'(x) = B$، $B \neq ۰$، آنگاه

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

برهان. فرض کنید $f = f_۱ + if_۲$، $g = g_۱ + ig_۲$، $A = A_۱ + iA_۲$ و $B = B_۱ + iB_۲$، در این صورت اگر $x \to a^+$، آنگاه

$$f_۱, f_۲, g_۱, g_۲ \to ۰$$

و

$$f'_۱ \to A_۱, f'_۲ \to A_۲, g'_۱ \to B_۱, g'_۲ \to B_۲$$

بنا بر قاعده‌ی هوپیتال برای قسمت‌های حقیقی و موهومی، نتیجه می شود

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} (\frac{f_۱(x)}{x-a} + i\frac{f_۲(x)}{x-a}) = A_۱ + iA_۲ = A$$

به همین طریق $\lim_{x\to a^+} \frac{g(x)}{x-a} = B$، پس

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{\frac{f(x)}{x-a}}{\frac{g(x)}{x-a}} = \frac{A}{B}$$

۳۲.۵ تمرین

۱) فرض کنید n عدد طبیعی دلخواهی باشد و

$$f_n(x) = |x|^{۱+\frac{۱}{n}}$$

نشان دهید هر f_n در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و f'_n را بیابید.

۲) تابع f را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{۲} x & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ (x-۱)^۲ + ۱ & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

f در چه نقاطی پیوسته و مشتق پذیر است؟

۳) فرض کنیم $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ تعریف شده باشد و $c \in (a, b)$

(آ) هرگاه $f'(c) = A$، آنگاه $\lim_{h\to ۰} \frac{f(c+h)-f(c-h)}{۲h} = A$

(ب) f را چنان پیدا کنید که در c مشتق پذیر نباشد ولی حد فوق موجود باشد

۴) فرض کنید f بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = ۰$ نشان دهید به ازای هر λ، عددی مانند $c \in (a, b)$ موجود است به طوری که

$$f'(c) = \lambda f(c)$$

۵) فرض کنید f در (a, b) به جز احتمالاً در $c \in (a, b)$ مشتق پذیر باشد نشان دهید هرگاه $\lim_{x\to c} f'(x) = A \ (A \in \mathbb{R})$، آنگاه $f'(c)$ موجود و برابر A است.

۶) فرض کنید در یک همسایگی نقطه‌ی c، تابع f مشتق پذیر باشد و نیز فرض کنید $f''(c)$ موجود باشد، نشان دهید

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(c+h)+f(c-h)-۲f(c)}{h^۲} = f''(c)$$

f را چنان پیدا کنید که $f''(c)$ موجود نباشد ولی حد فوق موجود باشد.

۷) فرض کنید f تابع حقیقی مشتق پذیر در (a,b) باشد نشان دهید

(آ) f محدب است اگر و فقط اگر f' صعودی باشد هرگاه در هر نقطه f'' موجود باشد نشان دهید

(ب) f محدب است اگر و فقط اگر $f'' \geq ۰$