دانشگاه تبریز

دانشکده علـوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

......، گرایش .....

عنوان

عنوان پایان‌نامه یا رساله

استاد راهنما

راهنمای اول

استاد مشاور

مشاور اول

پژوهشگر

نام دانشجو نام خانوادگی دانشجو

۱۳۹۷

بسم الله الرّحمن الرّحیم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدرم، مادرم،

برادرم و خواهرم

بنام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
سپاسگزاری می‌کنم.

نام دانشجو نام خانوادگی دانشجو
۱۳۹۷

نام خانوادگی دانشجو: نام خانوادگی دانشجو   نام: نام دانشجو

عنوان: عنوان پایان‌نامه یا رساله

استاد راهنما : راهنمای اول

استاد مشاور :مشاور اول

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: .....   دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۷   تعداد صفحات: ۲۲

کلید واژه‌ها: متر آفین، میدان‌های برداری هم‌آفین، ساختارهای هم‌آفین، پارامترطول قوس آفین، خم‌های آفین، خمینه‌های آماری، غوطه‌وری آفین.

چکیده

هندسه دیفرانسیل را از دو دیدگاه می‌توان مورد بررسی قرار داد. یکی از دیدگاه متری که هندسه ریمانی و شبه ریمانی نامیده می‌شود و دیگری از دیدگاه بدون متر که هندسه آفین نامیده می‌شود.
در این رساله سعی کرده‌ایم تا میدان‌های برداری را از دیدگاه متری خارج کرده و از دیدگاه آفین (هم‌آفین) به آن بپردازیم. مفهوم توازی در هندسه دیفرانسیل از اهمیت زیادی برخوردار است. به عنوان نمونه هندسه(شبه)ریمانی مطالعه تانسور متر است که نسبت به ارتباط لووی سویتا موازی است، یعنی $\nabla g = 0$. هدف از این رساله مطالعه عنصر حجم موازی می‌باشد. عنصر حجم موازی در هندسه دیفرانسیل از اهمیت زیادی بر خوردار است و در سالهای اخیر ریاضی دانان زیادی در این مورد در مراجع [؟، ؟، ۱، ۸، ؟] به تحقیق و مطالعه پرداخته‌اند. در این رساله مفهوم پارامتر طول قوس در هندسه ریمانی را به هندسه آفین(هم‌آفین)، تعمیم داده و آن را پارامتر طول قوس‌آفین می‌نامیم و همچنین مفهوم میدان برداری هم‌آفین در جهت یک میدان برداری را تعریف کرده و خواص آن را بررسی می‌کنیم.
[؟] مفهوم بعدی که در هندسه دیفرانسیل بررسی می‌شود، مفهوم غوطه‌وری می‌باشد که در فصل دو،

یک غوطه‌وری خاصی به نام غوطه‌وری اقلیدسی را مورد بررسی قرار داده و با اعمال شرط هم‌آفینی برای مولد آن و شرط ثابت بودن مؤ لفه تانسور ریچی، آن را کلاس‌بندی می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

هندسه دیفرانسیل را از دو دیدگاه می‌توان مورد بررسی قرار داد یکی از دیدگاه متری که هندسه ریمانی و شبه ریمانی نامیده می‌شود و دیگری از دیدگاه بدون متر که هندسه آفین نامیده می‌شود. در هندسه ریمانی به خاطر وجود تانسور متر می‌توان کارهای زیادی از قبیل اندازه گیری طول خم ها، سرعت، شتاب، مساحت، حجم و ... را انجام داد.

میدان‌های برداری یکی از مهمترین مفاهیم در هندسه دیفرانسیل می‌باشد که از دو دیدگاه آفین و متری می‌توان مورد مطالعه قرارداد که در مراجع [؟، ؟، ؟، ؟، ۲] میدان‌های برداری بیشتر از دیدگاه متری مورد بررسی قرار گرفته‌اند و در مراجع [؟، ؟، ۳، ؟، ۴] میدان‌های برداری بیشتر از دیدگاه آفین مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این رساله سعی کرده‌ایم تا میدان‌های برداری را از دیدگاه متری خارج کرده و از دیدگاه آفین (هم‌آفین) به آن به پردازیم. می‌دانیم که هندسه ریمانی مطالعه متر g است که نسبت به ارتباط ∇ موازی باشد که آن را، ارتباط لووی سویتا نامند. از چنین متری فرم حجمی ω را می‌توان بدست آورد که نسبت به ارتباط لووی سویتا موازی است، یعنی $\nabla\omega = 0$. ما در هندسه دیفرانسیل آفین برای مطالعه خم ها و میدان‌های برداری شرط موازی بودن متر را حذف می‌کنیم اما شرط موازی بودن عنصر حجم را حفظ می‌کنیم. عنصر حجم موازی در هندسه دیفرانسیل از اهمیت زیادی بر خوردار است و در سالهای اخیر ریاضی دانان زیادی مانند Zhang J. ، P. Gilkey ، S.Amari ، Matruzoe H. و Kurosu S. در این مورد در مراجع [؟، ؟، ؟، ۸، ؟، ۱] به تحقیق و مطالعه پرداخته‌اند. در هندسه ریمانی پارامتر یک خم دیفرانسیل پذیر طول قوس است هرگاه طول بردار مماس واحد باشد در این حالت بردار سرعت (مماس) بر بردار شتاب عمود است و مساحت مستطیل تشکیل شده بوسیله بردار سرعت و شتاب همان انحناء خم می‌باشد. چون در

هندسه آفین مفهوم طول وجود ندارد نمی‌توان پارامتر طول قوس را تعریف کرد اما به علت وجود فرم حجمی موازی می‌توان مفهوم طول قوس آفین را تعریف کرد، بدین صورت که پارامتر طول قوس را پارامتر طول قوس آفین گویند هرگاه مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط بردار سرعت و شتاب برابر یک باشد(در دو بعد).

در حالت n بعدی اگر $x : I \to \mathbb{R}^n$ خم دیفرانسیل پذیر باشد پارامتر آن را پارامتر طول قوس آفین گویند هرگاه $|x' \; x'' \; \cdots \; x^{(n)}| = ۱$. ما در این رساله از این مفهوم استفاده کرده و آن را به خم ها و میدان‌های برداری روی خمینه‌های با ساختار هم آفین گسترش می‌دهیم. به این صورت که اگر (M, ∇, ω) یک ساختار هم آفین باشد، میدان برداری Y را یک میدان برداری هم آفین در جهت میدان برداری X گوییم هرگاه $\omega(Y, \nabla_X Y, \nabla_X^۲ Y, \cdots, \nabla_X^{n-۱} Y) = ۱$. پارامتر خم $x : I \to M$ را پارامتر طول قوس آفین گویند، هرگاه x' میدان برداری هم‌آفین در امتداد خم x باشد. سرانجام همان طورکه در فصل ۳ به تفصیل بررسی خواهد شد مفهوم را تعریف کرده میدان‌های برداری را براساس آن کلاس بندی می‌کنیم که از آن قضیه زیر حاصل می‌شود

هندسه دیفرانسیل را از دو دیدگاه می‌توان مورد بررسی قرار داد یکی از دیدگاه متری که هندسه ریمانی و شبه ریمانی نامیده می‌شود و .

قضیه. *فرض کنید (M, ∇, ω) یک ساختار هم‌آفین دو بعدی و $\alpha : I \to M$ خم دیفرانسیل‌پذیر روی M باشد و $w_۰, v_۰$ بردارهای در $p = \alpha(۰)$ با $\omega(v_۰, w_۰) = ۱$ آنگاه هر میدان برداری Y با $K(Y) = k$ ثابت، به صورت زیر خواهد بود .*

$$
\begin{aligned}
Y_۱(t) &= tV(t) + W(t), && k = ۰,\\
Y_۲(t) &= \cos(\sqrt{k}\,t)V(t) + \frac{\sin(\sqrt{k}\,t)}{\sqrt{k}}W(t), && k > ۰,\\
Y_۳(t) &= \cosh(\sqrt{-k}\,t)V(t) + \frac{\sinh(\sqrt{-k}\,t)}{\sqrt{-k}}W(t), && k < ۰.
\end{aligned}
$$

که در آن بترتیب $W(t), V(t)$ انتقال‌موازی بردارهای $w_۰, v_۰$ در امتداد خم α می‌باشند. مفهوم بعدی که در هندسه دیفرانسیل بررسی می‌شود، مفهوم غوطه‌وری است که در فصل دو یک غوطه‌وری خاصی به نام غوطه‌وری اقلیدسی را مورد بررسی قرار داده و با اعمال شرط هم‌آفینی برای مولد آن و شرط ثابت بودن مؤ لفه تانسور ریچی آن را کلاس بندی می‌کنیم.

از این رساله دو مقاله با عناوین زیر تهیه شده است:

1. Equi-affine vector field on manifold with equi-affine structure. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*,2(13-16):793-801, 2007. MR2355854, Zbl 1134.53005, http://www.m-hikari.com/ijcms-password2007/13-16-2007/toomanianIJCMS13-16-2007.pdf.

2. Blaschke structure for a spacial affine immersion. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 43(4):214–220, August 2008. http://springerlink.com/content/8756t251t24m2771.

فصل ۱

پیشینه پژوهش و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

فصل نخست رساله مروری بر منابع ذکر شده در بخش بررسی منابع و بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصلهای آتی می‌باشد. بنابراین در بخش نخست چهارچوب بحث را مشخص و سپس مفاهیم مرتبط با بحث را تعریف خواهیم کرد. مفاهیم و قضایای اولیه بدون اثبات بیان خواهند شد چرا که هدف یادآوری مفاهیمی است که بعداً به آنها نیاز خواهد شد.

بیشتر مطالب را به [؟، ؟] ارجاع خواهیم داد. با وجود این هر مقدمه‌ای بر هندسه دیفرانسیل آفین مفید خواهد بود. برای مثال منابع [؟، ؟، ۵] را ذکر می‌کنیم، مخصوصاً کتابهای [؟، ؟، ؟، ؟، ۳] بسیار مفید می‌باشند.

۱.۱ مفاهیم پایه برای فضاهای آفین

فرض کنید V فضای برداری $n-$بعدی باشد. مجموعه ناتهی Ω را فضای آفین n بعدی وابسته به V گویند اگر نگاشت

$$\pi\colon \Omega\times\Omega\to V$$

در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای جمیع مقادیر $p, q, r \in \Omega$ داشته باشیم.

$$\pi(p,q)+\pi(q,r)=\pi(p,r)$$

۲) برای هر $p\in\Omega$ و $v\in V$، نقطه منحصربه فرد $q\in\Omega$ چنان وجود داشته باشد که $\pi(p,q)=v$. در این صورت معمولاً $\pi(p,q)$ را با نماد $\vec{pq}$ نشان می‌دهیم. برای هر $p\in\Omega$، نگاشت

$$\pi_p := \pi(p,.) : \Omega\to V$$

با ضابطه

$$q\to\pi_p(q)=\pi(p,q)$$

یک به یک است. بنابر این می‌توان روی Ω ساختار توپولوژیکی و دیفرانسیلی تعریف کرد. در ادامه به چند خاصیت مهم نگاشت π اشاره می‌کنیم.

۱) برای هر $p \in \Omega$ داریم $\pi(p,p) = 0$.

۲) برای هر $p, q \in \Omega$ اگر $\pi(p,q) = 0$ آنگاه $p = q$.

۲.۱ نگاشت آفین و گروه تبدیلات

فرض کنید Ω_1, Ω_2 فضاهای آفین وابسته به V_1, V_2 و $\pi_i : \Omega_i \times \Omega_i \to V_i$ باشند ، نگاشت $\alpha : \Omega_1 \to \Omega_2$ را آفین گویند هرگاه نگاشت خطی مانند $L_\alpha : V_1 \to V_2$ وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق کند.

$$\forall p, q \in \Omega_1, \quad \pi_2(\alpha(p), \alpha(q)) = L_\alpha(\pi_1(p,q))$$

به عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی باشد. L_α بطور منحصر به فرد مشخص می‌شود. L_α را نگاشت وابسته به α گویند.

لم ۱.۲.۱. *یک نگاشت آفین α یک‌به‌یک (پوشا) است اگر و فقط اگر L_α یک‌به‌یک (پوشا) باشد.*

برهان. فرض کنید α یک به یک باشد، ثابت می‌کنیم L_α نیز یک به یک است. فرض کنید $L_\alpha(v) = L_\alpha(v')$ که در آن $v, v' \in V_1$. با ثابت در نظر گرفتن نقطه $p \in \Omega_1$ و با توجه به تعریف π_1 نقاط منحصر به فرد $q, q' \in \Omega_1$ وجود دارد که $v = \pi_1(p,q), v' = \pi_1(p,q')$ در این صورت داریم.

$$L_\alpha(\pi_1(p,q)) = L_\alpha(\pi_1(p,q'))$$

$$\pi_2(\alpha(p), \alpha(q)) = \pi_2(\alpha(p), \alpha(q'))$$

$$\alpha(q) = \alpha(q')$$

$$q = q'$$

و بنابر این داریم $v = v'$.

بر عکس فرض کنید L_α یک به یک باشد برای اثبات یک به یک بودن α فرض می‌کنیم $\alpha(q) =$

$\alpha(q')$ باشد که در آن $q, q' \in \Omega_1$.

$$\pi_2(\alpha(p), \alpha(q)) = \pi_2(\alpha(p), \alpha(q'))$$
$$L_\alpha(\pi_1(p, q)) = L_\alpha(\pi_1(p, q'))$$
$$\pi_1(p, q) = \pi_1(p, q')$$
$$q = q'$$

حال فرض کنید L_α پوشا باشد، ثابت می‌کنیم α نیز پوشا است، یعنی برای هر $q_2 \in \Omega_2$ نقطه‌ای مانند $p_2 \in \Omega_2$ وجود دارد که $q_2 = \alpha(p_2)$. برای این کار فرض کنید $p_1 \in \Omega_1$،

$$v_2 = \pi_2(q_1, q_2), q_1 = \alpha(p_1)$$

باشند چون L_α پوشاست پس وجود دارد $v_1 \in V_1$ بطوریکه $L_\alpha(v_1) = v_2$ بنا به تعریف π_1 نقطه $p_2 \in \Omega_2$ وجود دارد که $v_1 = \pi_1(p_1, p_2)$ در این صورت داریم.

$$L_\alpha(v_1) = L_\alpha(\pi_1(p_1, p_2))$$

$$v_2 = \pi_2(q_1, q_2) = \pi_2(\alpha(p_1), \alpha(p_2))$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = \pi_2(q_1, \alpha(p_2))$$

از یک به یک بودن $\pi_2(q_1, .)$ داریم.

$$q_2 = \alpha(p_2)$$

برعکس فرض کنید α پوشا باشد، ثابت می‌کنیم L_α پوشا است. فرض کنید $v_2 \in V_2$ باشد و $p_2, q_2 \in \Omega_2$ بطوریکه $v_2 = \pi_2(p_2, q_2)$ چون α پوشا است نقاط $p_1, q_1 \in \Omega_1$ وجود دارند که $\alpha(p_1) = p_2, \alpha(q_1) = q_2$ با انتخاب $v_1 = \pi_1(p_1, q_1)$ داریم $L_\alpha(v_1) = v_2$ □

نگاشت α را منظم گویند هرگاه یک به یک و پوشا باشد. برای حالت $\Omega_1 = \Omega_2$ دترمینان α به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\det \alpha := \det L_\alpha$$

با ثابت نگاه داشتن نقطه $o \in \Omega$. آنگاه نگاشت آفین $\alpha : \Omega \to \Omega$ دارای نمایش زیر است.

$$\overrightarrow{o\alpha(p)} = L_\alpha(\overrightarrow{op}) + b$$

که در آن $b \in \Omega$.

می‌دانیم که مجموعه تمام اتومورفیسم‌های فضای برداری V از بعد n تشکیل گروه می‌دهند که آن‌ها با نمادهای زیر نشان می‌دهند .

$$GL(m, \mathbb{R}) := \{L : V \to V |\ L \text{ is isomorphism}\}$$

$$SL(m, \mathbb{R}) := \{L \in GL(m, \mathbb{R}) |\det L = ۱\}$$

متناظراً برای فضای آفین Ω از بعد n گروه تبدیلات آفین بصورت زیر تعریف می‌شود.

۱) گروه آفین منظم

$$\mathcal{A}(m) := \{\alpha : \Omega \to \Omega | L_\alpha \text{is regular}\}$$

۲) گروه هم‌آفین

$$\mathcal{S}(m) := \{\alpha \in \mathcal{A}(m) |\det \alpha = ۱\}$$

۳) گروه آفین مرکزی برای مرکز $p \in \Omega$

$$\mathcal{Z}_p(m) := \{\alpha \in \mathcal{A}(m) | \alpha(p) = p\}$$

۳.۱ ارتباط‌های آفین

در این بخش مفاهیم اولیه ارتباط های آفین بیان می‌شوند. فرض کنید M خمینه دیفرانسیل‌پذیر از رده C^∞ باشد.

تعریف ۱.۳.۱. نگاشت $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ را ارتباط آفین گویند هرگاه در شرایط زیر

صدق کند.

$$\nabla_{X_1+X_2}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y; \qquad (1.1)$$

$$\nabla_{\phi X}Y = \phi\nabla_X Y; \qquad (2.1)$$

$$\nabla_X(Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2; \qquad (3.1)$$

$$\nabla_X(\phi Y) = (X\phi)Y + \phi\nabla_X Y; \qquad (4.1)$$

که در آن $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ و $\phi : M \to \mathbb{R}$ یک نگاشت است.

یک ارتباط آفین بر M بطور طبیعی روی هر زیر خمینه باز U در M یک ارتباط القاء می‌کند. به ویژه اگر U همسایگی با مختصات موضعی $\{x^1 \cdots, x^n\}$ باشد، آنگاه داریم

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (5.1)$$

توابع $\Gamma_{ij}^k(i,j,k = 1,\cdots,n)$ نمادهای کریستوفل برای ارتباط آفین ∇ نسبت به دستگاه مختصات موضعی نامیده می‌شود.

با توجه به گزاره فوق $\frac{\nabla V}{dt}$ را مشتق کوواریان یا همگرد V گویند و آن را بانماد $\nabla_t V$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید M خمینه دیفرانسیل پذیر با ارتباط آفین ∇ باشد. میدان برداری V در امتداد خم $c : I \to M$ موازی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $t \in I$، $\nabla_t V = 0$.

حال مفهوم انتقال توازی را با گزاره زیر در خمینه های آفین تعریف می‌کنیم.

گزاره ۳.۳.۱. *فرض کنید M خمینه دیفرانسیل پذیر با ارتباط آفین ∇ و $c : I \to M$ یک خم دیفرانسیل پذیر باشد. فرض کنید v_0 بردار مماس بر M در $c(t_0)$ که $t_0 \in I$ باشد. اگر $v_0 \in T_{c(t_0)}M$، آنگاه میدان برداری منحصر بفرد V در طول خم c وجود دارد چنانکه $V(t_0) = v_0$.*

میدان برداری پیدا شده در گزاره فوق را انتقال توازی v_0 در امتداد خم c گویند. اگر Y میدان برداری در امتداد خم $x(t)$ باشد، مشتق کوواریان $\nabla_t Y$ را می‌توان بصورت زیر در مختصات موضعی

$\{x^1, \cdots, x^n\}$ تعریف کرد.

$$\nabla_t Y = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{dx^i}{dt} Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{۶.۱}$$

که در آن $x(t) = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ و $Y = \sum_{k=1}^{n} Y^k (\frac{\partial}{\partial x^k})$.

خم $x(t)$ را شبه ژئودزیک گویند هرگاه

$$\nabla_t x'(t) = \phi(t) x'(t)$$

که در آن $x'(t)$ میدان برداری مماسی $x(t)$ و $\phi(t)$ تابع معین می‌باشند. اگر $s = s(t)$ پارامتر دیگری برای $x(t)$ باشد داریم

$$\nabla_s x'(s) = \frac{1}{(\frac{ds}{dt})^2} \left[\frac{-\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}} x'(t) + \phi(t) x'(t) \right]$$

با انتخاب s بصورت $\frac{ds}{dt} = \exp(\int \phi(t)\, dt)$ خواهیم داشت

$$\nabla_s x'(s) = 0 \tag{۷.۱}$$

پارامتر s تعریف شده به صورت ۷.۱ را پارامتر آفین می‌نامند، که تحت تبدیل آفین $s \to as + b$ بطور یکتا، معین می‌شود. خم x را خم ژئودزیک گویند هرگاه پارامتر آن، پارامتر آفین باشد. برای یک ارتباط ∇، مفهوم مشتق کوواریان نسبت به یک میدان برداری را می‌توان به میدان‌های تانسوری تعمیم داد. فرض کنید K یک میدان تانسوری از نوع (r, s) باشد، یعنی، همگرد از مرتبه s و ناهمگرد از مرتبه r، آنگاه $\nabla_X K$ میدان تانسوری از نوع (r, s) است. همچنین می‌توان ∇K را به عنوان یک میدان تانسوری از نوع $(r, s+1)$ در نظر گرفت، یعنی نگاشت خطی

$$X \in \mathfrak{X}(M) \to \nabla_X K.$$

برای یک بحث کلی در این مورد، به ویژه برای تشریح ∇_X به عنوان یک مشتق از جبر میدان های تانسوری که تعمیم مشتق کوواریان میدان‌های برداری است. دو حالت خاص ارائه می‌شود.

۱) اگر K میدان تانسوری همگرد از مرتبه s، یعنی یک نگاشت s-خطی مانند $\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \cdots \mathfrak{X}(M)}_{s} \to \mathfrak{F}(M)$ باشد، آنگاه برای هر $X \in \mathfrak{X}(M)$ داریم

$$(\nabla_X K)(X_1, \cdots, X_s) = X(K(X_1, \cdots, X_n)) - \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \cdots, \nabla_X X_i, \cdots, X_s).$$

۲) اگر K میدان تانسوری همگرد از مرتبه $(1,s)$، یعنی یک نگاشت s-خطی $\mathfrak{X}(M)\to\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\cdots\mathfrak{X}(M)}_{s}$ باشد ، آنگاه

$$(\nabla_X K)(X_1,\cdots,X_s)=\nabla_X(K(X_1,\cdots,X_n))-\sum_{i=1}^{s}K(X_1,\cdots,\nabla_X X_i,\cdots,X_s).$$

میدان تانسوری تاب T، بصورت زیر تعریف می‌شود

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y].$$

که تانسوری از نوع $(1,2)$ است که‌به زوج (X,Y) از میدان‌های برداری، میدان برداری $T(X,Y)$ با ضابطه فوق، وابسته می‌کند، در حقیقت برای هر نقطه $x\in M$ نگاشت دو خطی، پاد متقارن $T_xM\times T_xM\to T_xM$ متناظر می‌کند. مؤلفه‌های تانسور تاب T در مختصات موضعی بصورت زیر است.

$$T_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k$$

تانسور ریچی، تانسوری است از نوع $(2,0)$ که بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{Ric}(Y,Z)=\mathrm{trace}\{X\to R(X,Y)Z\}$$

از نظر مؤلفه‌ای داریم

$$R_{jk}=\mathrm{Ric}(\frac{\partial}{\partial x^j},\frac{\partial}{\partial x^k})=\sum_i R_{kij}^i$$

می‌دانیم که در هندسه ریمانی، ارتباط لوی سویتای متر ریمانی، دارای تانسور ریچی متقارن است، یعنی $\mathrm{Ric}(X,Y)=\mathrm{Ric}(Y,X)$. اما این خاصیت لزوماً برای ارتباط های آفین آزاد تاب دلخواه برقرار نیست. در حقیقت این خاصیت وابسته است به عنصر حجم موازی که در ادامه آن را تعریف می‌کنیم.

ارتباط آفین ∇ را موضعاً هم‌آفین گویند هرگاه در هر نقطه x از M، عنصر حجم موازی وجود داشته باشد. یعنی n- فرم غیر صفر ω چنان باشد که $\nabla\omega=0$.

گزاره ۱.۳.۴. *اگر ω عنصر حجم موازی نسبت به ارتباط ∇ باشد آنگاه در دستگاه مختصات موضعی $\{x^1,\cdots,x^n\}$ داریم*

$$\Gamma_{ij}^j(x)=\frac{\partial\log(\omega(x))}{\partial x^i}$$

برهان. فرض کنید $\{\partial_1, \cdots, \partial_n\}$ پایه وابسته به $\{x^1, \cdots, x^n\}$ باشد باتوجه به شرط توازی داریم

$$(\nabla_{\partial_i}\omega)(\partial_1, \cdots, \partial_n) = \partial_i(\omega(\partial_1, \cdots, \partial_n)) - \sum_{l=1}^{n} \omega(\cdots, \overbrace{\nabla_{\partial_i}\partial_l}^{l}, \cdots)$$

$$\begin{aligned}
\partial_i(\omega(\partial_1, \cdots, \partial_n)) &= \sum_{l=1}^{n} \omega(\cdots, \overbrace{\nabla_{\partial_i}\partial_l}^{l}, \cdots) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \omega(\cdots, \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{il}^{k}\partial_k}^{l}, \cdots) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{il}^{k} \omega(\cdots, \overbrace{\partial_k}^{l}, \cdots) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{il}^{k} \delta_k^l \omega(\partial_1, \cdots, \partial_n) \\
&= \omega(\partial_1, \cdots, \partial_n) \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{il}^{l}
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۵.۳.۱. *اگر ∇ هم‌آفین باشد آنگاه* $\dfrac{\partial \Gamma_{ij}^{j}}{\partial x^k} = \dfrac{\partial \Gamma_{kj}^{j}}{\partial x^i}$

گزاره ۶.۳.۱. *ارتباط آزاد تاب ∇ دارای تانسور ریچی متقارن است اگر و فقط اگر هم‌آفین باشد.*

برهان. □

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید ∇ بر M آزاد تاب و ω عنصر حجمی موازی روی M باشد، در اینصورت (∇, ω) را ساختار هم‌آفین گویند.

اگر M همبند ساده باشد، آنگاه برای هر ارتباط هم‌آفین موضعی ∇ بر M عنصر حجمی ω چنان وجود دارد که (∇, ω) یک خمینه M با ساختار هم‌آفین تعمیمی از یک فضای آفین با تابع دترمینان ثابت به عنوان عنصر حجم می‌باشد.

۴.۱ ابرسطوح مرکزی

فرض کنید $\mathbb{R}^n$ فضای آفین با نقطه ثابت O بنام مبداء باشد. یک ابر رویه M، غوطه‌ور در $\mathbb{R}^n$ را ابر رویه آفین مرکزی می‌نامند هرگاه بردار وضعیت x (با مبداء O) در هر نقطه $x \in M$ با صفحه مماس T_xM اریب باشد. به ازاء هر دو بردار مماس X, Y بر M مشتق کوواریان D_XY در $\mathbb{R}^n$ را به دو مؤلفه به صورت زیر تجزیه می‌کنیم.

$$(D_XY)_x = (\nabla_XY)_x + h(X, Y)(-x)$$

که در آن $(\nabla_XY)_x$ مماس بر M است. در مرجع [؟، ص. ۱۵] ثابت می‌شود که ∇_XY در شرایط مشتق کوواریان آفین صدق می‌کند و تانسور انحناء R حاصل از ارتباط تولید شده بر یک ابر رویه آفین مرکزی، عبارت است از

$$R(X, Y)Z = h(Y, Z)X - h(X, Z)Y$$

همچنین

$$\mathrm{Ric}(Y, Z) = (n - ۱)h(Y, Z)$$

که متقارن است. ∇ را ارتباط حاصل از D و h را فرم اساسی آفین مرکزی بر M می‌نامند. حال با فرض این که λ تابع مشتق پذیر و مثبت بر M باشد، ابر رویه جدیدی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{M} = \{\bar{x}; \bar{x} = \lambda x, x \in M\}$$

نگاشت $f : M \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطه $f(x) = \lambda x$ در نظر می‌گیریم. به ازای میدان‌های برداری X, Y در M داریم

$$f_*(Y) = D_Y(\lambda x) = (Y\lambda)x + \lambda Y$$

یعنی f یک غوطه‌وری است. همچنین داریم،

$$\begin{aligned} D_X(f_*Y) &= D_X(Y(\lambda)x + \lambda Y) \\ &= X(Y(\lambda))x + (Y\lambda)X + (X\lambda)Y + \lambda(D_X Y) \\ &= X(Y(\lambda))x + (Y\lambda)X + (X\lambda)Y + \lambda((\nabla_X Y)) \\ &\quad + \lambda(h(X,Y)(-x)) \end{aligned}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} D_X f_*(Y) &= f_*(\bar\nabla_X Y) + \bar h(X,Y)(-x) \\ &= (\bar\nabla_X Y)\lambda x + \lambda \bar\nabla_X Y + \bar h(X,Y)(-x) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y + \frac{۱}{\lambda}(X\lambda)Y + \frac{۱}{\lambda}(Y\lambda)X$$

در نتیجه

$$\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X \qquad (۸.۱)$$

که در آن ρ ۱−فرم $d(\log\lambda)$ می‌باشد.

اگر $x(t)$ یک ∇−شبه ژئودزیک باشد، یعنی $\nabla_t x'_t = \phi(t)x'_t$ آنگاه

$$\bar\nabla_t x_t = (\phi(t) + ۲\rho(x'_t))x'_t$$

یعنی $x(t)$ نسبت به $\bar\nabla$ نیز شبه ژئودزیک است. عکس این مطلب نیز برقرار است. یعنی نگاشت هم‌آفین $f: M \to \bar M$ خم شبه ژئودزیک را به شبه ژئودزیک می‌نگارد. یعنی $f(x(t))$ شبه ژئودزیک بر $\bar M$ است. معمولاً f را تبدیل تصویری می‌نامند.

تعریف ۱.۴.۱. دو ارتباط هم‌آفین موضعی و آزاد تاب $\nabla, \bar\nabla$ بر خمینه M را هم ارز تصویری می‌نامند هرگاه فرم مرتبه اول ρ به صورت $d(\log\lambda)$ موجود باشد.(فرم ρ لزوماً بسته است)

تعریف ۲.۴.۱. ارتباط موضعاً هم‌آفین ∇ را به طور تصویری مسطح می‌نامند هرگاه حول هر نقطه یک تبدیل تصویری موجود باشد که ∇ را به ارتباط آفین مسطح $\bar{\nabla}$ متناظر کند.

برای ارتباط ∇، تانسور انحناء تصویری وایل، بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{W}(X,Y)Z = R(X,Y) - \frac{۱}{n-۱}[\mathrm{Ric}(Y,Z)X - \mathrm{Ric}(X,Z)Y]$$

با فرض $\gamma = \frac{۱}{n-۱}\mathrm{Ric}$ می‌توان حالت نرمال شده زیر را در نظر گرفت.

$$\mathbb{W}(X,Y)Z = R(X,Y) - [\gamma(Y,Z)X - \gamma(X,Z)Y]$$

در ادامه یک نتیجه کلاسیک در باره تانسور وایل خواهیم داشت که برای اثبات به صفحات ۸۸ و ۹۶ مرجع [۶] رجوع داده می‌شود.

قضیه ۳.۴.۱. *ارتباط آفین آزاد تاب ∇ با تانسور ریچی متقارن بر خمینه M بطور تصویری مسطح است اگر و فقط اگر در یکی از شرایط زیر صادق باشد.*

۱. $W \equiv ۰,\ \dim M \geq ۳$.

۲. $(\nabla_X\gamma)(Y,Z) = (\nabla_Y\gamma)(X,Z),\ \dim M = ۲$.

جدول ۱.۱: مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطای پارامتر λ با α معلوم

n	روش	$\alpha = ۰/۳$	$\alpha = ۰/۵$	$\alpha = ۱$	$\alpha = ۱/۵$	$\alpha = ۲$
۱۰	MME	۰/۵۰۷۴(۲/۸۴۷۳)	۰/۲۴۹۳(۰/۶۸۰۷)	۰/۱۱۲۰(۰/۱۹۲۶)	۰/۰۷۴۰(۰/۱۱۱۳)	۰/۰۵۶۲(۰/۰۷۹۷)
	MLE	۰/۵۳۳۵(۲/۹۰۳۰)	۰/۲۵۹۳(۰/۶۹۴۷)	۰/۱۱۲۰(۰/۱۹۲۶)	۰/۰۷۰۷(۰/۱۱۰۰)	−۰/۰۲۶۱(۰/۰۶۱۵)
۲۰	MME	۰/۱۷۷۶(۰/۳۷۲۴)	۰/۰۹۸۵(۰/۱۵۷۲)	۰/۰۴۸۴(۰/۰۶۵۲)	۰/۰۳۳۱(۰/۰۴۲۵)	۰/۰۲۵۷(۰/۰۳۲۳)
	MLE	۰/۱۸۷۵(۰/۳۶۶۲)	۰/۱۰۳۰(۰/۱۵۶۹)	۰/۰۴۸۴(۰/۰۶۵۲)	۰/۰۳۱۷(۰/۰۴۲۴)	۰/۰۰۴۱(۰/۰۳۱۴)
۳۰	MME	۰/۰۹۲۴(۰/۱۴۶۱)	۰/۰۵۳۴(۰/۰۷۵۴)	۰/۰۲۶۴(۰/۰۳۵۴)	۰/۰۱۷۹(۰/۰۲۳۹)	۰/۰۱۳۷(۰/۰۱۸۵)
	MLE	۰/۰۹۳۲(۰/۱۴۵۰)	۰/۰۵۵۸(۰/۰۷۵۶)	۰/۰۲۶۴(۰/۰۳۵۴)	۰/۰۱۷۱(۰/۰۲۳۹)	۰/۰۰۷۴(۰/۰۱۷۶)
۵۰	MME	۰/۰۸۰۴(۰/۰۹۲۸)	۰/۰۵۰۲(۰/۰۵۰۰)	۰/۰۲۸۲(۰/۰۲۴۰)	۰/۰۲۰۸(۰/۰۱۶۴)	۰/۰۱۷۰(۰/۰۱۲۷)
	MLE	۰/۰۸۰۸(۰/۰۹۲۳)	۰/۰۵۱۸(۰/۰۵۰۱)	۰/۰۲۸۲(۰/۰۲۴۰)	۰/۰۲۰۳(۰/۰۱۶۳)	۰/۰۱۱۱(۰/۰۱۱۹)
۱۰۰	MME	۰/۰۳۸۸(۰/۰۴۰۸)	۰/۰۲۳۵(۰/۰۲۳۱)	۰/۰۱۲۱(۰/۰۱۱۴)	۰/۰۰۸۳(۰/۰۰۷۸)	۰/۰۰۶۴(۰/۰۰۶۱)
	MLE	۰/۰۳۶۷(۰/۰۳۸۶)	۰/۰۲۴۵(۰/۰۲۳۲)	۰/۰۱۲۱(۰/۰۱۱۴)	۰/۰۰۷۹(۰/۰۰۷۸)	۰/۰۰۰۹(۰/۰۰۵۷)

جدول ۱.۲: مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطای پارامتر α با λ مجهول

n	روش	$\alpha = ۰/۴$	$\alpha = ۰/۵$	$\alpha = ۱$	$\alpha = ۱/۵$	$\alpha = ۲$
۱۰	MME	۱/۳۵۰۰(۵/۰۰۷۰)	۱/۳۰۲۶(۴/۹۷۴۷)	۱/۰۰۵۲(۴/۴۹۳۱)	۰/۶۷۰۸(۴/۰۸۱۸)	۰/۲۷۲۷(۳/۵۹۵۶)
	MLE	۰/۱۲۱۸(۰/۱۰۲۶)	۰/۱۶۸۶(۰/۱۷۵۵)	۰/۴۶۷۰(۱/۵۹۹۰)	۰/۸۷۹۹(۷/۰۳۶۳)	۱/۴۰۵۸(۲۲/۳۱۹۰)
۲۰	MME	۱/۲۱۵۴(۴/۱۱۰۶)	۱/۱۳۱۲(۳/۸۳۷۳)	۰/۸۹۲۰(۳/۷۰۰۳)	۰/۶۳۱۴(۳/۵۴۴۰)	۰/۴۱۶۷(۱/۲۵۰۴)
	MLE	۰/۰۴۱۲(۰/۰۱۹۴)	۰/۰۵۶۲(۰/۰۳۲۲)	۰/۱۵۷۸(۰/۱۹۴۷)	۰/۲۷۷۲(۰/۵۷۱۰)	۰/۳۱۶۶(۳/۴۱۰۲)
۳۰	MME	۰/۹۰۸۶(۲/۳۹۱۴)	۰/۸۱۲۶(۲/۰۶۲۱)	۰/۵۷۷۹(۱/۹۵۹۳)	۰/۳۸۵۴(۲/۱۴۳۸)	۰/۱۹۳۳(۲/۵۴۴۴)
	MLE	۰/۰۲۵۰(۰/۰۱۰۱)	۰/۰۳۵۹(۰/۰۱۶۲)	۰/۰۸۹۷(۰/۰۸۷۱)	۰/۱۵۵۵(۰/۲۴۳۰)	۰/۲۳۱۴(۰/۵۱۲۳)
۵۰	MME	۰/۷۷۹۰(۱/۷۵۹۴)	۰/۷۱۷۴(۱/۶۳۸۹)	۰/۴۹۹۰(۱/۵۵۹۶)	۰/۳۱۳۰(۱/۷۳۳۹)	۰/۰۸۲۸(۱/۸۳۱۴)
	MLE	۰/۰۱۱۰(۰/۰۰۶۷)	۰/۰۱۸۳(۰/۰۰۹۵)	۰/۰۵۱۲(۰/۰۴۶۶)	۰/۰۹۰۱(۰/۱۲۷۹)	۰/۱۳۵۱(۰/۲۶۵۷)
۱۰۰	MME	۰/۵۲۹۲(۰/۶۶۹۷)	۰/۴۷۴۵(۰/۵۹۹۱)	۰/۲۷۳۰(۰/۵۷۵۱)	۰/۰۹۷۵(۰/۷۷۵۰)	−۰/۰۸۹۶(۱/۰۵۹۰)
	MLE	۰/۰۰۸۳(۰/۰۰۳۳)	۰/۰۱۴۴(۰/۰۰۴۲)	۰/۰۳۶۲(۰/۰۲۲۱)	۰/۰۶۱۸(۰/۰۵۹۵)	۰/۰۹۰۶(۰/۱۲۱۶)

مراجع

[1] S. Amari. Differential geometry methods in statistics. Springer, New York, 1985. Lecture Notes in Statistics 28.

[2] N. Blažić, P. Gilkey, S. Nikčević, and U. Simon. Algebraic theory of affine curvature tensors. Archivum Mathematicum, 42:147–168, 2006.

[3] S. Bu Chin. Affine differential geometry. Science Press, Beijing, 1983.

[4] V. Deconchy. Hypersurface in symplectic affine geometry. Differential Geometry and its Applications, 17(1):1–13, 2002.

[5] M. Do Carmo. Riemannian geometry. Birkhauser, 1992.

[6] L. P. Eisenhart. Non-Riemannian geometry. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 8 edition, 1927.

[7] M. Faghfouri, A. Haji Badali, and E. Pourreza. Blaschke structure for a spacial affine immersion. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 43(4):214–220, August 2008. http://springerlink.com/content/8756t251t24m2771/.

[8] S. Kurosu. On a complex equiaffine immersion of general codimension. SUT Journal of Mathematics, 39(2):183–209, 2003.

[۹] امیدعلی، مهدی. *تابع هیلبرت*. پایان‌نامه دکترا، دانشکده ریاضی، دانشگاه امیرکبیر، تیر ۱۳۸۲.

[۱۰] واحدی، مصطفی. موضوعی جدید در هندسه محاسباتی. *مجله فارسی نمونه*، ۱(۲):۲۲—۳۰، آبان ۱۳۸۷.

E-mail:faghfouri@tabrizu.ac.ir

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آماره بسنده .... Sufficient statistic
آماره‌های ترتیبی .... Order statistics
اریبی .... Bias
استقلال .... Independence
اطلاع فیشر .... Fisher information
اندازه نمونه .... Sample size
بازه اطمینان توأم .... Joint confidence interval

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Asymptotic point	نقطه مجانبی
Asymptotic variance	واریانس مجانبی
Bias	اریبی
Chi-square distribution	توزیع خی دو
Coefficient of variation	ضریب تغییرات

Surname: Surname **Name:** Name

Title: Title

Supervisor: Ostade rahnma

Advisor: Ostade moshaver

Degree: Master of Science **Subject:** .....

Field: .... **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:** 2018 **Number of Pages:** 22

Keywords: Affine metric, Equi-affine curve, Equi-affine structure, Equi-affine transformation, Affine arc-length parameter, Affine curvature , Equi-affine vector field, Statistical manifold.

Abstract

We can study differential geometry in term of two different point of view. The first one is of metric view which lead to Riemannian or Pseudo-Riemannian geometry. The other one is considering the geometric property without existing a metric tensor which is affine differential geometry.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN

.....

Title

Supervisor

Ostade rahnma

Advisor

Ostade moshaver

By

Name Surname

2018